

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

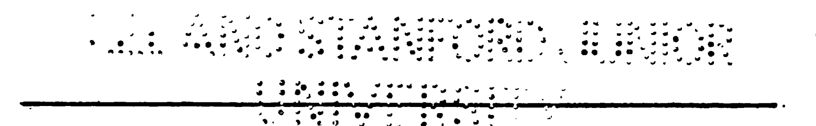
In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.



Funfzehnter Band.

In vier Heften.

Mit einer Kupfertafel.

Berlin, 1836.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathematiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des funfzehnten Bandes, nach den Gegenständen

Reine Mathematik.

1. Analysis.

1.

Formula transformationis integralium definitorum.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

1.

Est theorema notum et maximi momenti, evoluta functione U secundum cosinus aut sinus multiplorum anguli x, coëfficientes evolutionis determinari per integralia definita

$$\int_0^{2\pi} U\cos ix.dx, \qquad \int_0^{2\pi} U\sin ix.dx.$$

Quorum integralium valores cum semper per quadraturas certe inveniri possint, habetur methodus generalis, eiusmodi evolutiones peragendi.

Evolutio si bene convergit, valores integralium crescente i rapide decrescunt; quod quomodo fiat, facile intelligitur. Pro maioribus enim numeris i, valores functionum sub signo positivi et negativi rapidius se excipiunt, seque invicem maiorem partem destruunt. Hinc autem nascitur quoddam methodi incommodum; valorem enim quantitatis perparvae quaesitum determinandum esse videmus per differentias quantitatum magnarum. Quo incommodo in astronomicis determinatio magnarum in aequalitatum maxime premitur.

Casu speciali, quo evolvenda proponitur expressio

$$\frac{1}{\sqrt{(1-2a\cos x+a^2)}},$$

prodidit olim ill. *Legendre* ingeniosam integralium, quibus coëfficientes evolutionis exhibentur, transformationem, qua incommodo illi obveniatur. Quae continetur formula

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos ix.dx}{\sqrt{(1-2a\cos x+a^2)}} = a^i\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2i}x.dx}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)}}.$$

Integrale transformatum ductum est in factorem constantem parvum a^i; praeterea etiam sub signo invenitur factor parvus $\sin^{2i}x$, ita ut, si integrali transformato quadraturas applicas, valorem integralis parvum invenis ut summam quantitatum positivarum parvarum; quod calculum expeditum et idoneum suppeditat. Putabat ill. *Legendre*, illam transforma-

tionis formulam unicam sui generis esse *). Sed incidi nuper in formulam generalem, qua, proposita evolutione functionis in seriem secundum cosinus multiplorum anguli procedentem, integralia, quibus coëfficientes evolutionis exhibentur, transformantur in alia, in quibus sul signo loco $\cos ix$ invenitur factor $\sin^{2i}x$, et loco functionis evolvendae i^{tum} eius differentiale, secundum $\cos x$ sumtum. Si functio evolvenda est plurium angulorum, ex. gr. x, y, transformatione alteri variabili post alteram adhibita, integralia duplicia, quibus coëfficientes evolutionis exhibentur, commutantur in alia, in quibus loco factoris $\cos ix \cos i'y$ invenitur factor $\sin^{2i}x \sin^{2i'}y$ et loco functionis differentiale eius, i vicibus secundum $\cos x$, i' vicibus secundum $\cos y$ sumtum. Quae eiusdem generis est transformationis formula, atque illa olim ab ill. *Legendre* proposita. Rem sequentibus exponam et variis exemplis illustrabo.

2.

Designantibus m, n numeros integros positivos, habentur formulae notae:

$$1.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x \cos^{2n}x.dx = \frac{2m-1.2m-3\ldots.1.2n-1.2n-3\ldots.1}{2m+2n.2m+2n-2\ldots.2}.\frac{\pi}{2},$$

$$2.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m}x \cos 2nx.dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m}x \cos 2nx.dx$$
$$= \frac{1}{2^{2m}}.\frac{2m.2m-1\ldots.m+n+1}{1.2\ldots.m-n}.\frac{\pi}{2},$$

$$3.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m+1}x \cos(2n+1)x.dx = (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1}x \sin(2n+1)x.dx$$
$$= \frac{1}{2^{2m+1}}.\frac{2m+1.2m\ldots.m+n+2}{1.2\ldots.(m-n)}.\frac{\pi}{2}.$$

Formulas duas postremas amplectitur unica sequens, quae valet, quoties $p-i$ numerum parem positivum designat:

$$4.\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix.dx = \frac{1}{2^p}.\frac{p.p-1\ldots.\frac{p+i}{2}+1}{1.2\ldots.\frac{p-i}{2}},$$

quam formulam etiam sic exhibere licet:

*) *Fonct. ell.* T. II. pag. 536: nous saisirons cette occasion à démontrer une formule assez remarquable et qui parait ne se rattacher à aucune autre formule du même genre.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix . dx = \frac{p.p-1....p-i+1}{1.3....2i-1} . \frac{p-i-1.p-i-3....1.2i-1.2i-3....1}{2.4.6....p+i} . \frac{\pi}{2},$$

unde e (1.) prodit formula:

$$5. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos ix . dx = \frac{p.p-1....p-i+1}{1.3....2i-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i} x \cos^{p-i} x . dx.$$

Quae formula ut etiam pro numero $p-i$ impari valeat, utrumque integrale a 0 usque ad π extendamus; quo facto pro impari $p-i$ utrumque evanescit. *Designantibus igitur p, i numeros positivos integros, erit*

$$6. \quad \int_0^{\pi} \cos^p x \cos ix . dx = \frac{p.p-1....p-i+1}{1.3....2i-1} \int_0^{\pi} \sin^{2i} x \cos^{p-i} x . dx.$$

3.

Supponamus, ipsius z functionem $f(z)$ secundum positivas integras ipsius z dignitates evolvi posse, evolutamque fieri:

$$f(z) = \Sigma A_p . z^p;$$

ponamus porro cum ill. *Lagrange*

$$\frac{d^i f(z)}{dz^i} = f^{(i)}(z),$$

unde

$$f^{(i)}(z) = \Sigma p(p-1)....(p-i+1) A_p z^{p-i};$$

erit e (6.):

$$\int_0^{\pi} f(\cos x) . \cos ix\, dx = \Sigma A_p \int_0^{\pi} \cos^p x \cos ix\, dx$$

$$= \frac{1}{1.3....(2i-1)} \int_0^{\pi} dx \sin^{2i} x \Sigma p(p-1)....(p-i+1) A_p \cos^{p-i} x,$$

sive

$$7. \quad \int_0^{\pi} f(\cos x) . \cos ix\, dx = \frac{1}{1.3....(2i-1)} \int_0^{\pi} f^{(i)}(\cos x) . \sin^{2i} x\, dx.$$

Quae formula integralis definiti transformationem propositam suggerit.

4.

Formula (7.), antecedentibus inventa, etiam demonstrari potest ope lemmatis, per se memorabilis:

„*Differentiale* $(i-1)$*tum ipsius* $\sin^{2i-1} x$, *secundum* $\cos x$ *sumtum*, „*fieri*

$$„(-1)^{i-1} 1.3.5....(2i-1) . \frac{\sin ix}{i},$$

„*sive, posito* $\cos x = z$, *haberi*

$$„\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1} 1.3.5....(2i-1) \frac{\sin ix}{i}."$$

Quod ut demonstretur, observo, posito

$$p = a + bz + cz^2, \qquad q = b + 2cz,$$

haberi generaliter:

$$\frac{d^n . p^r}{dz^n} = r(r-1)\ldots(r-n+1)p^{r-n}q^n \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{n(n-1)}{r-n+1} \cdot \frac{cp}{q^2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(r-n+1)(r-n+2).2} \cdot \frac{c^2p^2}{q^4} \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(r-n+1)(r-n+2)(r-n+3).2.3} \cdot \frac{c^3p^3}{q^6} \ldots \end{array} \right\}.$$

Cf. *Lacroix* Traité du C. d. T. I. pag. 183. Unde substitutis valoribus:

$$p = a + bz + cz^2 = 1 - z^2 = \sin^2 x, \quad q = -2z = -2\cos x, \quad c = -1,$$

$$r = \frac{2i-1}{2}, \quad n = i - 1,$$

provenit:

$$\frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^i}$$

$$(-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1)\left[\cos^{i-1}x\sin x - \frac{i-1.i-2}{2.3}\cos^{i-3}x\sin^3 x + \frac{i-1.i-2.i-3.i-4}{2.3.4.5}\cos^{i-5}x\sin^5 x\ldots\right],$$

sive per formulas notas trigonometricas,

$$8. \qquad \frac{d^{i-1}(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^{i-1}} = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1)\frac{\sin ix}{i};$$

quod demonstrandum erat.

Demonstrato lemmate, formula (7.) facile probatur integratione per partes, i vicibus repetita. Quoties enim functio aliqua w eiusque differentialia usque ad $(i-1)$tum in limitibus integrationis evanescant, notum est, haberi integrando per partes:

$$\int w \frac{d^i v}{dz^i}.dz = (-1)^i \int v \frac{d^i w}{dz^i}.dz.$$

Unde posito

$$v = f(z), \qquad w = (1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}},$$

atque integratione a -1 usque ad $+1$ extensa, prodit

$$\int_{-1}^{+1} f^{(i)}(z)(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}} dz = (-1)^i \int_{-1}^{+1} f(z) \frac{d^i(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^i}.dz.$$

Ipsum enim $(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}$ eiusque differentialia usque ad $(i-1)$tum in limitibus $z = -1$, $z = +1$ evanescunt. Differentiata autem (8.) secundum z, habemus.

$$\frac{d^i(1-z^2)^{\frac{2i-1}{2}}}{dz^i}.dz = (-1)^{i-1}.3.5\ldots(2i-1)\cos ix.dx.$$

Unde posito $z = \cos x$, formula antecedens abit in sequentem:

$$\int_0^\pi f^{(i)}(\cos x).\sin^{2i}x\,dx = 3.5\ldots.(2i-1)\int_0^\pi f(\cos x).\cos ix\,dx,$$

quae est formula proposita (7.).

Demonstratio antecedens nil supponit, nisi quod functio $f(\cos x)$, eiusque differentialia usque ad i^{tum} intra limites integrationis assignatos non in infinitum abeant; neque illa supponit, quod prior demonstratio, functionem $f(\cos x)$ secundum dignitates *integras* ipsius $\cos x$ evolvi posse. Ad quem igitur casum formula (7.) non restringitur. Unde, posito $f(\cos x) = \cos^p x$, patet, *formulam* (6.) *valere etiam si p non sit numerus integer, dummodo $p > i$.*

5.

His iungimus considerationes sequentes. Statuamus brevitatis causa:

$$B_i = \frac{1.3\ldots.2i-1}{2.4\ldots.2i},$$

erit e (7.):

$$B_i.\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx = \int_0^\pi \frac{f^{(i)}(\cos x).\sin^{2i}x\,dx}{2^i.1.2.3\ldots.i}.$$

Unde cum, designante h constantem unitate minorem; sit:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{[1-he^{x\sqrt{-1}}]}}+\frac{1}{\sqrt{[1-he^{-x\sqrt{-1}}]}}\right] = 1+B_1 h\cos x+B_2 h^2\cos 2x+B_3 h^3\cos 3x\ldots,$$

invenitur per theorema Taylorianum:

$$9.\quad \frac{1}{2}\int_0^\pi dx f(\cos x)\left[\frac{1}{\sqrt{[1-he^{x\sqrt{-1}}]}}+\frac{1}{\sqrt{[1-he^{-x\sqrt{-1}}]}}\right] = \int_0^\pi f\left(\cos x+\frac{h\sin^2 x}{2}\right)dx.$$

Quam formulam etiam sic exhibere licet:

$$10.\quad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{f(\cos x)\,dx}{\sqrt{[1-he^{x\sqrt{-1}}]}} = \int_0^\pi f\left(\cos x+\frac{h\sin^2 x}{2}\right)dx.$$

Formula (9.) etiam e transformatione indefinita deduci potest. Posito enim:

$$\cos\eta = \cos x+\frac{h\sin^2 x}{2},$$

sequitur

$$\sqrt{(1-2\cos\eta+h^2)} = 1-h\cos x,$$

unde

$$\sqrt{(1-2h\cos\eta+h^2)}-(1-h\cos\eta) = \frac{h^2\sin^2 x}{2}.$$

De qua aequatione, extractis radicibus, provenit haec:

$$\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}-\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})} = -h\sin x\sqrt{-1}.$$

Qua ducta in $\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}+\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}$, ac divisione per h facta, prodit:

$$2\sin\eta = \sin x[\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}+\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}].$$

Iam differentiata aequatione proposita, nanciscimur:

$$\sin\eta . d\eta = \sin x [1 - h\cos x]\, dx.$$

Ex antecedentibus autem fit:

$$\frac{2\sin\eta}{\sin x[1-h\cos x]} = \frac{1}{\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}};$$

unde videmus, *posito*

$$11. \qquad \cos\eta = \cos x + \frac{h\sin^2 x}{2},$$

fieri

$$12. \qquad dz = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}}\right] d\eta$$

ideoque etiam

$$13. \quad \int f\left(\cos x + \frac{h\sin^2 x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\int f(\cos\eta)\left[\frac{1}{\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}} + \frac{1}{\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}}\right] d\eta.$$

Quoties h unitate minor, crescente x a 0 usque ad π, expressio $\cos x + \frac{h\sin^2 x}{2}$ inde a 1 usque ad -1 continuo decrescit; quippe cuius differentiale $-\sin x[1-h\cos x]$ valorem semper positivum servat; unde simul etiam angulus η a 0 usque ad π continuo crescit. Hinc patet, in formula (13.), altero integrali a 0 usque ad π extenso, etiam alterum a 0 usque ad π extendi. Quod formulam (9.) suppeditat.

Observo adhuc, e formulis traditis

$$\sqrt{(1-2h\cos\eta+h^2)} = 1-h\cos x,$$

$$\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})} - \sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})} = -h\sin x\sqrt{-1},$$

sequi:

$$14. \qquad [1-\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}][1+\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}] = he^{x\sqrt{-1}}$$

$$[1+\sqrt{(1-he^{\eta\sqrt{-1}})}][1-\sqrt{(1-he^{-\eta\sqrt{-1}})}] = he^{-x\sqrt{-1}}.$$

E formula (12.) habetur integrando expressio anguli x:

$$15. \qquad x = \eta + \frac{1}{2}.h\sin\eta + \frac{1.3}{2.4}.\frac{h^2\sin 2\eta}{2} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{h^3\sin 3\eta}{3} + \dots.$$

Idem etiam deducitur e theoremate *Lagrangiano*, data aequatione

$$\alpha - z + \varphi z = 0,$$

fieri

$$\psi z = \psi\alpha + \varphi\alpha\psi'\alpha + \frac{d.(\varphi\alpha)^2\psi'\alpha}{2d\alpha} + \frac{d^2.(\varphi\alpha)^3\psi'\alpha}{2.3\,d\alpha^2} + \frac{d^3.(\varphi\alpha)^4\psi'\alpha}{2.3.4\,d\alpha^3} + \dots.$$

Quippe e qua serie, posito

$$\psi z = \arccos z, \qquad \alpha = \cos\eta, \qquad \varphi z = -\frac{h(1-z^2)}{2},$$

et advocata (8.), formula (15.) provenit. Vice versa e formula (15.) per theorema *Lagrangianum* ipsa (8.) deduci potest.

6.

Ut de formula generali (7.) deducatur formula supra citata, ab ill. *Legendre* condita,

$$\int_0^\pi \frac{\cos ix\,dx}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}} = a^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\,dx}{\sqrt{[1-a^2\sin^2 x]}},$$

ita agere licet.

Posito

$$f(\cos x) = [1-2a\cos x+a^2]^{-\frac{1}{2}},$$

habetur

$$\frac{f^{(i)}(\cos x)}{1.3\ldots.(2i-1)} = a^i[1-2a\cos x+a^2]^{-\frac{2i+1}{2}},$$

unde e (7.) fit:

$$16. \quad \int_0^\pi \frac{\cos ix\,dx}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}} = a^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{\frac{2i+1}{2}}}.$$

Iam posito

$$17. \quad \sin y = \frac{\sin x}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}},$$

obtinetur, quae nota est transformatio integralium ellipticorum *Landeniana:*

$$18. \quad \frac{dy}{\sqrt{[1-a^2\sin^2 y]}} = \frac{dx}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}}.$$

Limites ipsius x, ubi sunt 0 et π, ipsius y quoque limites 0 et π habentur; unde e (17.), (18.) fit:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{\frac{2i+1}{2}}} = \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}y\,dy}{\sqrt{[1-a^2\sin^2 y]}}$$

quod substitutum in (16.) formulam propositam suggerit.

Data occasione adnotabo transformationem indefinitam, quae formulae *Legendrianae* veram indolem aperit. In qua demonstranda signis et notationibus, in fundamentis meis propositis, utar.

Quoties $f(u)$ est functio periodica, hoc est, quae valorem non mutat, aucto argumento u certa quadam constante, quam indicem periodi vocamus: integrale

$$\int f(u)\,du,$$

inter binos quoscunque limites sumtum, quarum differentia indici periodi aequalis est, eundem valorem servat, argumento u quantitate qualibet sive reali sive imaginaria aucto, dummodo intra limites integrationis functio integranda non in infinitum abit.

Hinc si statuimus

$$f(u) = \sin^{2m}\mathrm{am}(u)$$

erit, designante i quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}=\int_0^{4k}\sin^{2n}\mathrm{am}(u)\,du=\int_0^{4k}\sin^{2n}\mathrm{am}\left(k+\frac{iK'}{2}\right)du.$$

Posito $\mathrm{am}(u)=\varphi$, $\mathrm{am}(a)=\alpha$, habetur e theoremate *Euleriano:*

$$\sin\mathrm{am}(u+a)=\frac{\cos\alpha\,\Delta\,\alpha\sin\varphi+\sin\alpha\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1-k^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi},$$

qua in formula posito $a=\frac{iK'}{2}$, unde

$$\sin\alpha=\frac{i}{\sqrt{k}},\qquad \cos\alpha=\sqrt{\left(\frac{1+k}{k}\right)},\qquad \Delta\alpha=\sqrt{(1+k)},$$

eruitur

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)=\frac{(1+k)\sin\varphi+i\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1+k\sin^2\varphi}.$$

Iam statuamus

$$\frac{(1+k)\sin\varphi}{1+k\sin^2\varphi}=\sin\psi,\qquad \frac{2\sqrt{k}}{1+k}=\lambda,$$

unde etiam

$$\frac{\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1+k\sin^2\varphi}=\cos\psi,\qquad \frac{1-k\sin^2\varphi}{1+k\sin^2\varphi}=\Delta(\psi,\lambda),$$

$$du=\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}=\frac{d\psi}{(1+k)\Delta(\psi,\lambda)}=\frac{d\psi}{\sqrt{[1+2k\cos2\psi+k^2]}}.$$

Quae est substitutio, qua ill. *Gauss* exhibuit transformationem *Landenianum* iunctam *bisectioni*. Substitutis formulis antecedentibus, provenit

$$\sqrt{k}\sin\mathrm{am}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)=ie^{-i\psi},$$

ideoque

$$\int\frac{[\cos2n\psi+i\sin2n\psi]\,d\psi}{\sqrt{[1+2k\cos2\psi+k^2]}}=(-k)^n\int\sin^{2n}\mathrm{am}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)du.$$

Quae est transformatio indefinita, e qua pro limitibus definitis formula ill. *Legendre* fluit.

Crescente enim u a 0 usque ad $4K$ sive φ a 0 usque ad 2π, etiam ψ a 0 usque ad 2π crescit, inter quos limites evanescit pars imaginaria in $\sin2n\psi$ ducta; unde prodit

$$(-k)^n\int_0^{2\pi}\frac{\sin^{2n}\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)}}=-k^n\int^{4k}\sin^{2n}\mathrm{am}(u)\,du$$

$$=-k^n\int_0^{4k}\sin^{2n}\mathrm{am}\left(u+\frac{iK'}{2}\right)=\int_0^{2\pi}\frac{\cos2n\psi\,d\psi}{\sqrt{[1+2k\cos2\psi+k^2]}},$$

quae formula posito $k=-a$, $n=i$, in propositam abit.

7.

Formula

$$\int_0^{\pi}\frac{dx\cos ix}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}}=a^i\int_0^{\pi}\frac{dx\sin^{2i}k}{\sqrt{(1-a^2\sin^2x)}}$$

commode adhibetur, si agitur de evolutione integralis

$$\int_0^\pi \frac{dx \cos ix}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}}$$

in seriem, quae pro magnis ipsius i valoribus rapide convergat. Nam cum sit e (1.)

$$\int_0^\pi \sin^{2i} x . \cos^{2n} x \, dx = \frac{1.3.5 \ldots 2i-1 . 1.3.5 \ldots 2n-1}{2.4.6 \ldots 2i+2n} . \pi$$

$$= \frac{1.3 \ldots 2i-1}{2.4 \ldots 2i} . \frac{1.3 \ldots 2n-1}{2i+2.2i+4 \ldots 2i+2n} . \pi,$$

nec non habeatur

$$\frac{1}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)}} = \frac{1}{\sqrt{(1-a^2+a^2\cos^2 x)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-a^2)}}\left[1-\frac{1}{2}.\frac{a^2\cos^2 x}{1-a^2}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{a^4\cos^4 x}{(1-a^2)^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{a^6\cos^6 x}{(1-a^2)^3}\ldots\right]$$

eruitur

$$21. \quad \int_0^\pi \frac{dx . \cos ix}{\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]}}$$

$$= \frac{1.3.5 \ldots 2i-1}{2.4.6 \ldots 2i} . \frac{\pi . a^i}{\sqrt{(1-a^2)}} \left\{ \begin{array}{l} 1-\frac{1}{2}.\frac{1}{2i+2}.\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{1.3}{2.4}.\frac{1.3}{2i+2.2i+4}.\frac{a^4}{(1+a^2)^2} \\ -\frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{1.3.5}{2i+2.2i+4.2i+6}.\frac{a^6}{(1-a^2)^3}+\ldots \end{array} \right\}$$

quam seriem patet pro magnis ipsius i valoribus celerrime convergere.

III. *Legendre* invenit evolutionem generaliorem memorabilem,

$$22. \quad \int_0^\pi \frac{dx \cos ix}{[1-2a\cos x+a^2]^n}$$

$$= \frac{n(n+1) \ldots (n+i-1)}{1.2 \ldots i} . \frac{\pi . a^i}{(1-a^2)^n} \left\{ \begin{array}{l} 1+\frac{n(n-1)}{1.i+1}.\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.i+1.i+2}.\frac{a^4}{(1-a^2)^2}+ \\ \frac{(n+1).n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.i+1.i+2.i+3}.\frac{a^6}{(1-a^2)^3}+\ldots \end{array} \right\},$$

quam et ipsam patet, pro magnis ipsius i valoribus celerrime convergere. Quam evolutionem ut indagaret, ill. *Legendre*, explorato per artificium particulare primo seriei termino, assumpsit seriei formam sequentem

$$\int_0^\pi \frac{dx \cos ix}{[1-2a\cos x+a^2]^n} = \pi P_i$$

$$= \frac{n(n+1) \ldots (n+i-1)}{1.2 \ldots i} . \frac{\pi a^i}{(1-a^2)^n}\left[1+\frac{c'}{i+1}+\frac{c''}{i+1.i+2}+\frac{c'''}{i+1.i+2.i+3}\ldots\right]$$

ipsis c', c'', c''' cet. a numero i non pendentibus. Quo facto per relationem linearem, quae inter tres terminos P_{i-1}, P_i, P_{i+1} intercedit,

$$(i+1-n) . P_{i+1} - \frac{1+a^2}{a} . i P_i + (i-1+n) P_{i-1} = 0$$

terminos c', c'', c''' cet. alios post alios determinavit.

Demonstrationem formulae (22.) fortasse magis directam ope theorematis nostri (7.) obtines modo sequente.

Posito

$$f(\cos x) = [1-2a\cos x+a^2]^{-n}$$

habetur

$$f^{(i)}(\cos x) = (2a)^i . n(n+1)\dots(n+i-1)[1-2a\cos x+a^2]^{-(n+i)}$$

unde e (7.):

$$23. \quad \int_0^\pi \frac{\cos ix\,dx}{(1-2a\cos x+a^2)^n} = \frac{n(n+1)\dots(n+i-1)}{1.3\dots 2i-1}(2a)^i \int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{n+i}}.$$

Ponamus $\sqrt{[1-2a\cos x+a^2]} = R$; $\frac{\sin x}{R} = \sin y$, erit

$$\frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{n+i}} = \frac{-1}{(2n-1)a}.\sin^{2i-1}y\,d.R^{-(2n-1)},$$

quod inter limites 0 et π secundum utramque variabilem integratum, suggerit:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{n+i}} = \frac{-1}{(2n-1)a}\int_0^\pi \sin^{2i-1}y.\frac{dR^{-(2n-1)}}{dy}.dy.$$

Evolvamus expressionem $R^{-(2n-1)}$ secundum ipsius $\cos y$ dignitates ascendentes. Eum in finem observo, haberi:

$$R^2-\sin^2 x = (\cos x-a)^2 = \cos^2 y . R^2$$

ideoque cum sit $2a(\cos x-a) = 1-a^2-R^2$, fit:

$$R^2+2a\cos y R = 1-a^2.$$

Unde habetur evolutio quaesita *):

$$24. \quad R^{-(2n-1)} = [1-2a\cos x+a^2]^{-(2n-1)}$$

$$= \frac{2n-1}{\sqrt{[(1-a^2)^{2n-1}]}}\left[\frac{1}{2n-1}+\frac{a\cos y}{\sqrt{(1-a^2)}}+\frac{2n-1}{2}.\frac{a^2\cos^2 y}{1-a^2}+\frac{2n-2.2n}{2.3}.\frac{a^3\cos^3 y}{\sqrt{[(1-a^2)^3]}}\right.$$
$$\left.+\frac{2n-3.2n-1.2n+1}{2.3.4}.\frac{a^4\cos^4 y}{\sqrt{[(1-a^2)^4]}}+\dots\right].$$

Unde

$$-\frac{\sin^{2i-1}y}{(2n-1)a}.\frac{dR^{-(2n-1)}}{dy}$$

$$= (1-a^2)^{-n}\sin^{2i}y\left[1+(2n-1)\frac{a\cos y}{\sqrt{(1-a^2)}}+\frac{2n-2.2n}{1.2}.\frac{a^2\cos^2 y}{(1-a^2)}+\frac{2n-3.2n-1.2n+1}{1.2.3}.\frac{a^3\cos^3 y}{\sqrt{[1-a^2)^3]}}+\dots\right].$$

Qua expressione secundum y integrata a 0 usque ad π, termini in potestates impares ipsius $\cos y$ ducti evanescunt; pro reliquis fit e (1.):

*) V. *Lacroix* Traité de C. d. et i. Vol. I. pag. 286., ubi ponas loco α, β, γ, y, m, n expressiones $1-a^2$, 1, $-2a\cos y$, R^2, $\frac{1}{2}$, $-\frac{2n-1}{2}$.

$$\frac{(2n-2m)(2n-2m+2)\dots(2n+2m-2)}{1.2.3\dots 2m}\int_0^\pi \sin^{2i}y\cos^{2m}y\,dy$$
$$=\frac{1.3\dots 2i-1}{2.4\dots 2i}\cdot\frac{(n-m)(n-m+1)\dots(n+m-1)}{1.2\dots m.i+1.i+2\dots i+m}.\pi$$
$$=\frac{1.3\dots 2i-1}{2.4\dots 2i}(1-a^2)^{-n}.\pi\left[1+\frac{n-1.n}{1.i+1}\cdot\frac{a^2}{1-a^2}+\frac{n-2.n-1.n.n+1}{1.2.i+1.i+2}\cdot\frac{a^4}{(1-a^2)^2}\dots\right].$$

Unde

$$\int_0^\pi\frac{\sin^{2i}x\,dx}{[1-2a\cos x+a^2]^{n+1}}=\frac{-1}{(2n-1)a}\int_0^\pi\sin^{2i-1}y\frac{d.R^{-(2n-1)}}{dy}.dy=\frac{1.3\dots 2i-1}{2.4\dots 2i}\text{ etc.}$$

quod substitutum in (23.), formulam (22.) ab ill. *Legendre* propositam suggerit.

8.

E formula (23.) facile etiam deducis *Euleri* formulam memorabilem. Posito enim in (23.) $2x$ loco x, $-a$ loco a, fit:

$$\int_0^\pi\frac{\cos 2ix\,dx}{[1+2a\cos 2x+a^2]^n}=\frac{n.n+1\dots n+i-1}{1.3\dots 2i-1}.(-2a^i)\int_0^\pi\frac{\sin^{2i}2x\,dx}{[1+2a\cos 2x+a^2]^{n+i}};$$

ponamus in altero integrali

$$\frac{1-a}{1+a}\operatorname{tang}x=\operatorname{tang}y,$$

unde

$$\frac{(1-a^2)\sin 2x}{1+2a\cos 2x+a^2}=\sin 2y;\qquad 1+2a\cos 2x+a^2=\frac{(1-a^2)^2}{1-2a\cos 2y+a^2};$$
$$\frac{(1-a^2)dx}{1+2a\cos 2x+a^2}=dy,$$

ideoque:

$$\int_0^\pi\frac{\cos 2ix\,dx}{[1+2a\cos 2x+a^2]^n}$$
$$=\frac{n.n+1\dots n+i-1}{1.3\dots 2i-1}\cdot\frac{(-2a)^i}{(1-a^2)^n}\int_0^\pi[1-2a\cos 2y+a^2]^{n-i-1}\sin^{2i}2y\,dy.$$

Posito autem in (23.) $1-n$ loco n, prodit

$$\int_0^\pi[1-2a\cos 2x+a^2]^{n-1}\cos 2ix\,dx$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)\dots(n-i)}{1.3\dots(2i-1)}(-2a)^i\int_0^\pi[1-2a\cos 2y+a^2]^{n-i-1}\sin^{2i}2y\,dy,$$

qua formula in antecedente substituta, obtinetur:

$$\int_0^\pi\frac{\cos 2ix\,dx}{[1+2a\cos 2x+a^2]^n}$$
$$=\frac{n.n+1\dots n+i-1}{n-1.n-2\dots n-i}\cdot\frac{1}{(1-a^2)^n}\int_0^\pi[1-2a\cos 2x+a^2]^{n-1}\cos 2ix\,dx,$$

quae est egregia formula, in qua *Eulerus* olim multum occupatus erat.

9.

Sint ε, μ, e anomaliae excentrica, media, excentricitas, unde

$$\mu = \varepsilon - e\sin\varepsilon.$$

Cosinus aut sinus multipli anomaliae excentricae in series infinitas evolvatur, quae secundum cosinus aut sinus multiplorum anomaliae mediae procedunt:

$$\cos n\varepsilon = p_n + 2p'_n\cos\mu + 2p''_n\cos 2\mu + 2p'''_n\cos 3\mu + \dots$$
$$\sin n\varepsilon = \quad q'_n\sin\mu + \quad q''_n\sin 2\mu + \quad q'''_n\sin 3\mu + \dots,$$

erit

$$p_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos i\mu\cos n\varepsilon\, d\mu = \frac{n}{i\pi}\int_0^\pi \sin i\mu\sin n\varepsilon\, d\varepsilon$$
$$= \frac{n}{2i\pi}\int_0^\pi d\varepsilon[\cos((i-n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon) - \cos((i+n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon)],$$
$$q_n^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin i\mu\sin n\varepsilon\, d\mu = \frac{n}{2i\pi}\int_0^\pi \cos i\mu\cos n\varepsilon\, d\varepsilon$$
$$= \frac{n}{i\pi}\int_0^\pi d\varepsilon[\cos((i-n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon) + \cos((i+n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon)],$$

quae integralium transformationis integrando per partes obtinentur. Si cum ill. *Bessel* ponimus

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(i\varepsilon - k\sin\varepsilon)\, d\varepsilon = I_k^{(i)},$$

erit

$$p_n^{(i)} = \frac{n}{2i}[I_{ie}^{(i-n)} - I_{ie}^{(i+n)}],$$
$$q_n^{(i)} = \frac{n}{i}[I_{ie}^{(i-n)} + I_{ie}^{(i+n)}].$$

Prout i par aut impar, habetur etiam

$$I_k^{(2i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(k\sin\varepsilon)\cos 2i\varepsilon . d\varepsilon = \frac{(-1)^i}{\pi}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\cos 2i\varepsilon . d\varepsilon,$$
$$I_k^{(2i+1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(k\sin\varepsilon)\sin(2i+1)\varepsilon . d\varepsilon = \frac{(-1)^i}{\pi}\int_0^\pi \sin(k\cos\varepsilon)\cos(2i+1)\varepsilon . d\varepsilon,$$

unde transcendentes $I_k^{(2i)}$, $I_k^{(2i+1)}$ sunt coëfficientes evolutionis ipsorum $\cos(k\cos\varepsilon)$, $\sin(k\cos\varepsilon)$, secundum cosinus multiplorum ipsius ε institutae,

$$\cos(k\cos\varepsilon) = I_k^{(0)} - 2I_k^{(2)}\cos 2\varepsilon + 2I_k^{(4)}\cos 4\varepsilon - 2I_k^{(6)}\cos 6\varepsilon + \dots$$
$$\sin(k\cos\varepsilon) = \quad 2I_k^{(1)}\cos\varepsilon - 2I_k^{(3)}\cos 3\varepsilon + 2I_k^{(5)}\cos 5\varepsilon - \dots$$

Si cosinus et sinus multipli anomaliae mediae secundum cosinus et sinus multiplorum excentricae evolvendi sunt, ponatur

$$\cos i\mu = k^{(i)} + 2k_1^{(i)}\cos\varepsilon + 2k_2^{(i)}\cos 2\varepsilon + 2k_3^{(i)}\cos 3\varepsilon + \dots$$
$$\sin i\mu = \quad l_1^{(i)}\sin\varepsilon + \quad l_2^{(i)}\sin 2\varepsilon + \quad l_3^{(i)}\sin 3\varepsilon + \dots,$$

erit

$$k_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos i\mu \cos n\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi d\varepsilon[\cos((i-n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon) + \cos((i+n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon)],$$

$$l_n^{(i)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin i\mu \sin n\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\varepsilon[\cos((i-n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon) - \cos((i+n)\varepsilon - ie\sin\varepsilon)],$$

sive

$$k_n^{(i)} = \frac{1}{2}[I_{ie}^{(i-n)} + I_{ie}^{(i+n)}] = \frac{i}{2n}.q_n^{(i)},$$

$$l_n^{(i)} = I_{ie}^{(i-n)} - I_{ie}^{(i+n)} = \frac{2i}{n}.p_n^{(i)}.$$

Transcendentium $I_k^{(i)}$ naturam variosque usus in determinandis integralibus definitis exposuit ill. *Bessel* in commentatione celeberrima *de perturbationibus, quae a motu solis pendent* (Acad. Berol. ad a. 1825). In qua demonstravit, functiones $I_k^{(0)}$, $I_k^{(1)}$, $I_k^{(2)}$, $I_k^{(3)}$, ... omnes per duas ex earum numero lineariter exprimi. Unde patet, cognitis coëfficientibus evolutionis ipsorum $\cos\varepsilon$, $\sin\varepsilon$, secundum multipla anomaliae mediae institutae, coëfficientes evolutionis ipsorum $\cos n\varepsilon$, $\sin n\varepsilon$ ex iis lineariter determinari. Eaedem transcendentes cum in theoria motus caloris obveniant, etiam viri illustres, qui de calore egerunt, varias earum proprietates passim adnotaverunt.

Sed his missis factis, transformemus integrale $I_k^{(i)}$ per formulam (7.). Cuius ope, posito respective $f(z) = \cos(kz)$, $f(z) = \sin(kz)$, eruitur:

$$\pi.I_k^{(2i)} = (-1)^i\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\cos 2i\varepsilon.d\varepsilon = \frac{k^{2i}}{1.3.5....4i-1}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{4i}\varepsilon.d\varepsilon,$$

$$\pi.I_k^{(2i+1)} = (-1)^i\int_0^\pi \sin(k\cos\varepsilon)\cos(2i+1)\varepsilon.d\varepsilon = \frac{k^{2i+1}}{1.3.5....4i+1}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{4i+2}\varepsilon.d\varepsilon,$$

unde, sive i par sit, sive impar:

$$\pi.I_k^{(i)} = \frac{k^i}{1.3....2i-1}\int_0^\pi \cos(k\cos\varepsilon)\sin^{2i}\varepsilon.d\varepsilon.$$

Quam transcendentis $I_k^{(i)}$ expressionem et ipse ill. *Bessel* (l. c. form. 53) per artificia particularia demonstravit.

10.

Addam exemplum de integrali duplici transformando, quod et ipsum in astronomicis utile esse potest. Sit

$$f^{(i,i')}(\cos x, \cos x') = \frac{d^{i+i'}f(y,z)}{d^i y\, d^{i'} z},$$

si post differentiationes factas ponitur $y = \cos x$, $z = \cos x'$: obtinetur e formula (7.), variabilibus x, x' alteri post alteram applicata,

$$25.\quad \int_0^\pi\int_0^\pi f(\cos x, \cos x')\cos ix \cos i'x'\,dx\,dx'$$
$$= \frac{1}{1.3\ldots.2i-1.1.3\ldots.2i'-1}\int_0^\pi\int_0^\pi f^{(i,i')}(\cos x, \cos x')\sin^{2i}x \sin^{2i'}x'\,dx.$$

Sit
$$f(\cos x, \cos x') = [l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{-n},$$
erit e (25.):
$$26.\quad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}$$
$$=(-2)^{i+i'}l'^i l''^{i'}.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+i+i'-1)}{1.3\ldots.2i-1.1.3\ldots.2i'-1}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x \sin^{2i'}x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{n+i+i'}}.$$

Sint duarum planetarum orbitae circulares, radii a, a', inclinatio I, anomaliae φ, φ'. Quarum planetarum distantiae reciprocae $n$ta potestas evolvenda proponatur secundum multipla ipsorum $\varphi+\varphi'$, $\varphi-\varphi'$; quae sit evolutio
$$\frac{1}{[a^2-2aa'(\cos\varphi\cos\varphi'+\cos I\sin\varphi\sin\varphi')+a'^2]^{\frac{n}{2}}} = \Sigma p_{i,i'}\cos i(\varphi-\varphi')\cos i'(\varphi+\varphi'),$$
summa extensa ad numeros i, i' et positivos et negativos a $-\infty$ usque ad $+\infty$. Posito $\frac{n}{2}$ loco n, porro
$$l = a^2+a'^2,\quad l' = -aa'\cos^2\tfrac{1}{2}I,\quad l'' = -aa'\sin^2\tfrac{1}{2}I,\quad \varphi-\varphi' = x,$$
$$\varphi+\varphi' = x',$$
erit e (26.):
$$27.\quad p_{i,i'} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix\cos i'x'\,dx\,dx'}{\left[a^2-2aa'\left(\cos^2\frac{I}{2}\cos x+\sin^2\frac{I}{2}\cos x'\right)+a'^2\right]^{\frac{n}{2}}}$$
$$= \frac{n(n+2)(n+4)\ldots.(n+2i+2i'-2)}{1.3\ldots.2i-1.1.3\ldots.2i'-1}.a^{i+i'}a'^{i+i'}.\cos^{2i}\tfrac{1}{2}I\sin^{2i'}\tfrac{1}{2}I\times$$
$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^{2i}x\sin^{2i'}x\,dx\,dx'}{\left[a^2-2aa'\left(\cos^2\frac{I}{2}\cos x+\sin^2\frac{I}{2}\cos x'\right)+a'^2\right]^{\frac{n}{2}+i+i'}}.$$

Quae posterior expressio, cum et ordinem coëfficientis $p_{i,i'}$ bene manifestet, et, si computus per quadraturas placet, commoda sit, in perturbationibus usui esse potest, si inclinatio, uti in recentioribus planetis, maiuscula est.

11.

Formula (7.) etiam adhiberi potest, valori integralis $\int_0^\pi U\cos i\varphi\,d\varphi$ determinando, si i in infinitum crescit. Quae poscitur determinatio, ut, evoluta U in seriem secundum cosinus multiplorum ipsius φ procedentem, de convergentia seriei indicari possit. Transformato enim per (7.) inte-

grali proposito $\int_0^\pi U\cos i\varphi\, d\varphi$ in formam $\int_0^\pi V\sin^{2i}\varphi\, d\varphi$, huic pro i infinito determinando applicari potest methodus *Laplaciana* pro integralibus, quae sub signo integrationis magnis exponentibus afficiuntur, proxime determinandis.

Sit ex. gr.

$$A = \int_0^\pi \frac{\cos ix\, dx}{[l+2l'\cos x]^n},$$

erit e (7.):

$$A = \frac{n(n+1)\ldots.(n+i-1)}{1.3\ldots.(2i-1)}(-2l')^i \int_0^\pi \left[\frac{\sin^2 x}{l+2l'\cos x}\right]^i \frac{dx}{[l+2l'\cos x]^n}.$$

Quaeramus valorem maximum expressionis, sub signo integrationis ad i^{tam} dignitatem elatae, quae, posito $\cos x = y$, fit

$$\frac{\sin^2 x}{l+2l'\cos x} = \frac{1-y^2}{l+2l'y}.$$

Cuius differentiali $= 0$ posito, fit

$$0 = y(l+2l'y)+l'(1-y^2) = l'+ly+l'y^2,$$

unde prodeunt duo ipsius y volores,

$$y = \frac{-l\pm\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2l'},$$

quorum productum cum sit $=1$, alter unitate absolute maior erit, alter absolute minor. Posterior eligi debet, cum $y = \cos x$ ideoque unitate absolute minor; qui valor, si, quod supponimus, l positiva, radicali positivo respondet. Habetur autem pro valore illo

$$\frac{1-y^2}{l+2l'y} = \frac{y(1-y^2)}{ly+2l'y^2} = -\frac{y}{l'} = \frac{l-\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2l'^2} = \frac{2}{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}},$$

qui est valor maximus quaesitus. Differentiale secundum expressionis

$$\frac{1-y^2}{l+2l'y} = \frac{4l'^2-l^2}{4l'^2(l+2l'y)} + \frac{l}{2l'^2} - \frac{l+2l'y}{4l'^2},$$

respectu ipsius y sumtum, fit pro valore ipsius y assignato,

$$-\frac{l^2-4l'^2}{(l+2l'y)^3} = \frac{-2}{\sqrt{(l^2-4l'^2)}}.$$

Unde posito

$$y = \frac{-l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2l'} - \frac{t}{\sqrt{i}},$$

provenit:

$$\frac{1-y^2}{l+2l'y} = \frac{2}{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}} - \frac{t^2}{i\sqrt{(l^2-4l'^2)}} + \frac{at^3}{\sqrt{i^3}} + \ldots,$$

ideoque pro i infinito:

$$\left(\frac{1-y^2}{l+2l'y}\right)^i = \left(\frac{2}{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}\right)^i e^{-\frac{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2\sqrt{(l^2-4l'^2)}}\cdot t^2}.$$

Porro fit pro i infinito:

$$\frac{dx}{[l+2l'\cos x]^n} = \frac{-dy}{\sqrt{(1-y^2)}(l+2l'y)^n} = \left(\frac{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}(l^2-4l'^2)^{-\frac{2n+1}{4}}\frac{dt}{\sqrt{i}}.$$

Integralis limites pro i infinito sumere licet a $-\infty$ usque ad $+\infty$; inter quos limites habetur

$$\left(\frac{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}{2\sqrt{(l^2-4l'^2)}}\cdot t^2}\,dt = \sqrt[4]{(l^2-4l'^2)}.\sqrt{\pi}.$$

Quibus omnibus substitutis, prodit pro i infinito:

$$28. \qquad A = \frac{n.n+1\ldots.n+i-1}{1.3\ldots.2i-1}(l^2-4l'^2)^{-\frac{n}{2}}\left(\frac{-4l'}{l+\sqrt{(l^2-4l'^2)}}\right)^i\sqrt{\frac{\pi}{i}}.$$

Si statuitur $l=1+a^2$, $l'=a$, fit e (28.):

$$29. \qquad A = \frac{n.n+1\ldots.n+i-1}{1.3\ldots.2i-1}(1-a^2)^{-n}(-2a)^i\sqrt{\frac{\pi}{i}},$$

Eadem expressio habetur e formula ill. *Legendre* (22.):

$$30. \qquad A = \frac{n.n+1\ldots.n+i-1}{1.2\ldots i}(1-a^2)^{-n}(-a)^i\pi.$$

Utraque (29.), (30.) inter se comparata, prodit pro i infinito

$$31. \qquad \frac{1.3\ldots.2i-1}{2.4\ldots.2i} = \frac{1}{\sqrt{(i\pi)}},$$

quae *Wallisii* nota est formula.

12.

Quaeramus iam valorem duplicis integralis

$$B = \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix\cos i'x'\,dx\,dx'}{(l+2l'\cos x+2l''\cos x')^n}$$

primum, si alter numerorum i, i' infinitus; *deinde*, si uterque in infinitum abit.

Sit igitur i infinitus, i' finitus; ponendo $l+2l''\cos x'$ loco l in (28.), obtinemus:

$$B = \frac{n.n+1\ldots n+i-1}{1.3\ldots 2i-1}\sqrt{\frac{\pi}{i}}(-4l')^i\int_0^\pi\frac{[(l+2l''\cos x')^2-4l'^2]^{-\frac{n}{2}}\cos i'x'\,dx'}{[l+2l''\cos x'+\sqrt{((l+2l''\cos x')^2-4l'^2)}]^i}.$$

Expressionis sub signo integrationis ad i^{tam} dignitatem elatae valor maximus respondet, siquidem l'' positiva, valori $x'=\pi$. Posito igitur $x'=\pi-\frac{t}{\sqrt{i}}$, fit

$$l+2l''\cos x'+\sqrt{[(l+2l''\cos x')^2-4l'^2]} =$$
$$l-2l''+\sqrt{[(l-2l'')^2-4l'^2]}+\frac{l-2l''+\sqrt{[(l-2l'')^2-4l'^2]}}{\sqrt{[(l-2l'')^2-4l'^2]}}\cdot\frac{l''t^2}{i}\cdot\frac{\alpha t^4}{\sqrt{(i^3)}}\cdots$$

Unde

$$[l+2l''\cos x'+\sqrt{((l+2l''\cos x')^2-4l'^2)}]^{-i}$$
$$=[l-2l''+\sqrt{((l-2l'')^2-4l'^2)}]^{-i}e^{-\frac{l''t^2}{\sqrt{((l-2l'')^2-4l'^2)}}}.$$

Cum π sit alter limes integrationis propositae neque ulterius x' extendatur, limites respectu ipsius t erunt 0 et ∞. Facta integratione, pro i infinito, i' finito prodit:

$$32.\quad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix\cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n} =$$

$$(-1)^{i+i'}\cdot\frac{n.n+1\ldots n+i-1}{1.2\ldots 2i-1}\cdot\frac{\pi}{2i}\cdot\frac{[(l-2l'')^2-4l'^2]^{-\frac{2n-1}{4}}}{\sqrt{l''}}\cdot\left(\frac{4l'}{l-2l''+\sqrt{((l-2l'')^2-4l'^2)}}\right)^i,$$

siquidem l'' positiva accipitur. Numerum i' videmus in valore apposito tantum signum afficere. Eandem formulam e (31.) etiam sic repraesentare licet:

$$33.\quad \frac{1.2.3\ldots i.1.2.3\ldots i}{1.3\ldots 2i-1.n.n+1\ldots n+i-1}\cdot\frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\cos ix\cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}$$
$$=(-1)^{i+i'}\frac{[(l-2l'')^2-4l'^2]^{-\frac{2n-1}{4}}}{2\sqrt{l''}}\left(\frac{l'}{l-2l''+\sqrt{((l-2l'')^2-4l'^2)}}\right)^i.$$

Si i' eiusdem ordinis est atque $\sqrt{i}$, ponatur

$$\frac{i'}{\sqrt{i}}=r,$$

quae erit quantitas finita; fit $\cos i'x'=\cos i'\left(\pi-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)=(-1)^{i'}\cos rt$. Unde cum habeatur nota formula:

$$\int_0 dt\cos rt\,e^{-a^2t^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-\frac{r^2}{4a^2}}=e^{-\frac{r^2}{4a^2}}\int_0^\infty dt\,e^{-a^2t^2},$$

altera pars aequationis (32.) vel (33.) adhuc multiplicanda erit per

$$e^{\frac{-r^2\sqrt{((l-2l'')^2-4l'^2)}}{4l''}},$$

Iam ad alterum casum pergamus, quo $\frac{i'}{i}$ quantitas finita.

13.

Sit igitur $\frac{i'}{i}=r$ quantitas finita: per formulam (25.) invenimus (26.):

$$B=\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\cos x\cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}=$$

$$(-2)^{i+i'}\frac{n(n+1)\ldots(n+i+i'-1)}{1.3\ldots 2i-1.1.3\ldots 2i'-1}l'^il''^{i'}\int_0^\pi\int_0^\pi\left(\frac{\sin^{2i}x\sin^{2i'}x'}{(l+2l'\cos x+2l''\cos x')^{i+i'}}\right)\frac{dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}.$$

Sit $\cos x = y$, $\cos x' = z$, ac quaeramus expressionis

$$\frac{\sin^2 x \sin^{2r} x'}{[l + 2l' \cos x + 2l'' \cos x']^{1+r}} = \frac{(1-y^2)(1-z^2)^r}{[l+2l'y+2l''z]^{1+r}}$$

alorem maximum. Expressione et secundum y et secundum z differentiata, et differentialibus nihilo aequiparatis, prodeunt aequationes:

$$34.\quad \begin{cases}(1+r)l' + ly + (1-r)l'y^2 = -2l''yz, \\ (1+r)l'' + rlz - (1-r)l''z^2 = -2rl'yz;\end{cases}$$

a quibus ipsarum y, z valores, qui expressionem propositam maximam reddant, petendi sunt. Quibus inventis, habetur, si ex aequatione priore z eliminas, sive e posteriore y:

$$l + 2l'y + 2l''z = -(1+r)l'\left(\frac{1-y^2}{y}\right) = \frac{-(1+r)l''}{r} \cdot \frac{1-z^2}{z},$$

ideoque valor maximus quaesitus:

$$35.\quad \frac{(1-y^2)(1-z^2)^r}{[l+2l'y+2l''z]^{1+r}} = \left(\frac{-1}{1+r}\right)^{1+r} \cdot \frac{r^r}{l'.l''^r} \cdot yz^r.$$

Observo, quod natura problematis poscit, aequationis (34.) alteram in alteram abire, permutatis l' et l'', y et z, simulque posito $\frac{1}{r}$ loco r.

Sint $y = a$, $z = b$ valores quaesiti; erit e (34.):

$$a.l + (1 + r + (1-r)a^2)l' + 2ab.l'' = 0,$$
$$rb.l + 2rab.l' + (1 + r - (1-r)b^2)l'' = 0,$$

unde:

$$36.\quad l : l' : l'' = \frac{1+a^2}{1-a^2} + r.\frac{1+b^2}{1-b^2} : \frac{-a}{1-a^2} : \frac{-br}{1-b^2}.$$

Quibus aequationibus si pro datis ipsorum a, b valoribus satisfit, iisdem etiam pro valoribus eorum reciprocis satisfieri patet.

In locum formulae (36.), accito multiplicatore p, substituamus aequationes

$$\frac{1+a^2}{1-a^2} + r.\frac{1+b^2}{1-b^2} = p.l, \qquad \frac{-a}{1-a^2} = pl', \qquad \frac{-br}{1-b^2} = pl'',$$

unde posito

$$\frac{1+a^2}{1-a^2} = \sqrt{(1+4p^2l'^2)} = A, \quad r.\frac{1+b^2}{1-b^2} = \sqrt{(r^2+4p^2l''^2)} = B,$$

eruitur

$$A + B = p.l$$

qua aequatione per $A - B$ multiplicata, fit:

$$pl(A-B) = 1 - r^2 + 4p^2(l'^2 - l''^2)$$

unde

$$2pl.A = 1 - r^2 + p^2[ll + 4l'l' - 4l''l''],$$
$$2pl.B = (1-r^2) + p^2[ll + 4l'l' + 4l''l''].$$

Quarum aequationum alterutra quadrata, prodit:

$$0 = (1-r^2)^2 - 2[(1+r^2)ll - 4(1-r^2)(l'l' - l''l'')]p^2 + E.p^4,$$

siquidem brevitatis causa ponitur

$$E = (l+2l'+2l'')(l+2l'-2l'')(l-2l'+2l'')(l-2l'-2l'').$$

Integrale propositum ne inter limites integrationis in infinitum abeat, statui debet, summam ipsarum $2l'$, $2l''$ positive acceptarum ipse l minorem esse; unde E semper erit positiva. Quo casu habentur ipsias p^2 duo valores positivi, dati per aequationem:

$$E.p^2 = M + 2l\sqrt{R}, \quad \text{sive} \quad p^2 = \frac{(1-r^2)^2}{M-2l\sqrt{R}} = \frac{M+2l\sqrt{R}}{E},$$

si br. c. statuitur:

$$M = (1+r^2)ll - 4(1-r^2)(l'l' - l''l''),$$
$$R = r^2.ll - 4(1-r^2)(r^2 l'l' - l''l'').$$

E formulis, quibus pA, pB rationaliter per p^2 exhibuimus, fit:

$$\frac{p.A}{1-r^2} = \frac{l-\sqrt{R}}{M-2l\sqrt{R}}, \quad \frac{p.B}{1-r^2} = -\frac{r^2 l - \sqrt{R}}{M-2l\sqrt{R}},$$

sive cum sit

$$p = \frac{1-r^2}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}},$$

provenit

$$A = \frac{l-\sqrt{R}}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}, \quad B = -\frac{r^2 l - \sqrt{R}}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}},$$

unde

$$a = -\frac{A-1}{2l'p} = -\frac{l-\sqrt{R}-\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}{2(1-r^2)},$$
$$b = -\frac{B-}{2l''p} = \frac{r^2 l - \sqrt{R} + r\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}{2(1-r^2)l},$$

sive etiam

$$a = -\frac{2l'p}{A+1} = \frac{2(1-r^2)l'}{l-\sqrt{R}+\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}},$$
$$b = -\frac{2l''p}{B+r} = -\frac{2(1-r^2)l''}{\sqrt{R}-r^2 l + r\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}},$$

In expressionibus antecedentibus duo inveniuntur radicalia, $\sqrt{R}$ et $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$, e quorum duplici signo quatuor prodeunt systemata valorum ipsorum a, b. In expressionibus autem A, B, p, a, b radicalis illa eodem signo accipienda sunt; quo facto valores eorum correspondentes sine omni ambiguitate determinantur.

Si radicalis $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ signum in oppositum mutas, eodem manente $\sqrt{R}$, abit p in $-p$, simulque a, b in $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$. Quod patet e formulis

$$A = \frac{1+a^2}{1-a^2} = \frac{l-\sqrt{R}}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}, \quad B = r.\frac{1+b^2}{1-b^2} = -\frac{r^2 l-\sqrt{R}}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}},$$

sive etiam ex ipsorum a, b valoribus, cum sit

$$M-R = ll-4(1-r^2)^2 l'l',$$
$$r^2 M-R = r^4 ll-4(1-r^2)^2 l''l''.$$

Quantitates E, M, R semper sunt positivae; porro cum sit

$$M^2-4ll.R = (1-r^2)^2 E,$$

erunt expressiones $M \pm 2l\sqrt{R}$ utraque positivae. Supponamus, quod licet, $r = \frac{i'}{i} < 1$; sequitur ex aequationibus:

$$R = ll-(1-r^2)[ll+4r^2 l'l'-4l''l''],$$
$$R = r^4 ll+(1-r^2)[r^2(ll-4l'l')+4l''l''],$$

esse

$$l > \sqrt{R} > r^2 l.$$

Unde liquet, si $\sqrt{R}$ positive accipiatur, expressiones

$$A = \frac{1+a^2}{1-a^2} = \frac{l-\sqrt{R}}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}, \quad B = r.\frac{1+b^2}{1-b^2} = \frac{\sqrt{R}-r^2 l}{\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}}$$

eodem signo affectas esse, et quidem, si $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ positiva, utramque fore positivam, ideoque utramque a, b unitate absolute minorem; si $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ negativa, utramque A, B fore negativam, ideoque utramque a, b unitate absolute maiorem. Porro, si $\sqrt{R}$ negativa, prout $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ aut positiva aut negativa, fore aut A positivam, B negativam, ideoque a unitate absolute minorem, b unitate absolute maiorem; aut A negativam, B positivam, ideoque a unitate absolute maiorem, b unitate absolute minorem.

Sequitur ex antecedentibus, siquidem summa ipsarum $2l'$, $2l''$ positive acceptarum ipsa l inferior est, quod in integrali proposito supponi debet, semper dari systema et unicum quidem valorum $y=a$, $z=b$, unitate absolute minorum; qui valores, si $r<1$, quod supponere licet, radicalibus $\sqrt{R}$, $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ positivis respondent. Eodem modo probatur, si $r>1$, valores illos respondere $\sqrt{R}$ positivo, $\sqrt{[M-2l\sqrt{R}]}$ negativo.

Valores ipsorum y, z, quorum in quaestione proposita usus est, unitate absolute minores esse debent, cum sit $y=\cos x$, $z=\cos x'$. Unde expressio proposita

$$\frac{\sin^2 x \sin^{2r} x'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{1+r}}$$

nonnisi *unum* maximum habet. Quod invenitur e (35.), si $r<1$,

$$\frac{r^r(2(1-r))^{1+r}}{[l-\sqrt{R}+\sqrt{(M-2l\sqrt{R})}]\,[\sqrt{R}-r^2 l+\sqrt{(M-2l\sqrt{R})}]^r}=\mu.$$

utraque radicali positive accepto.

Si $r=1$, fit

$$p=\frac{2l}{\sqrt{E}},\quad A=\frac{ll+4l'l'-4l''l''}{\sqrt{E}},\quad B=\frac{ll-4l'l'+4l''l''}{\sqrt{E}},$$

$$a=\frac{-4ll'}{ll+4l'l'-4l''l''+\sqrt{E}},\quad b=\frac{-4ll''}{ll-4l'l'+4l''l''+\sqrt{E}};$$

maximum quaesitum fit:

$$\mu=\frac{2}{ll-4l'l'-4l''l''+\sqrt{E}}.$$

Quaeramus iam valores, quos induunt differentialia secunda expressionis

$$u=\frac{(1-y^2)(1-z^2)^r}{[l+2l'y+2l''z]^{1+r}},$$

si post differentiationes ponitur $y=a$, $z=b$. Differentialia prima ipsius u habemus

$$\frac{du}{dy}=\frac{-2u}{(1-y^2)(l+2l'y+2l''z)}[(1+r)l'+ly+(1-r)\,l'y^2+2l''yz],$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{-2u}{(1-z^2)(l+2l'y+2l''z)}[(1+r)l''+rlz-(1-r)\,l''z^2+2rl'yz].$$

Quibus iterum differentiatis, cum pro valoribus substituendis $y=a$, $z=b$ evanescant

$$(1+r)l'+ly-(1-r)l'y^2+2l''yz,$$
$$(1+r)l''+rlz-(1-r)l''z^2+2rl'yz,$$

prodit:

$$\frac{d^2u}{dy^2}=\frac{-2\mu[l+2(1-r)l'a+2l''b]}{(1-a^2)(l+2l'a+2l''b)},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}=\frac{-2\mu[rl-2(1-r)l''b+2rl'a]}{(1-b^2)(l+2l'a+2l''b)},$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{-4ul''a}{(1-a^2)(l+2l'a+2l''b)}=\frac{-4url'b}{(1-b^2)(l+2l'a+2l''b)}.$$

Quae expressiones e formulis inventis abeunt in sequentes:

$$\frac{d^2u}{2dy^2}=\frac{-\mu[1+r-(1-r)a^2]}{(1+r)(1-a^2)^2}=-\mu\alpha,$$

$$\frac{d^2u}{2dz^2}=\frac{-\mu r[1+r+(1-r)b^2]}{(1+r)(1-b^2)^2}=-\mu\gamma,$$

$$\frac{d^2u}{dy\,dz}=\frac{4\mu rab}{(1+r)(1-a^2)(1-b^2)}=2\mu\beta$$

unde

$$\alpha\gamma-\beta\beta = \frac{r[1+r-(1-r)(a^2-b^2)-(1+r)a^2b^2]}{(1+r)(1-a^2)^2(1-b^2)^2}$$
$$= \frac{(B+r^2A)}{(1+r)(1-a^2)(1-b^2)} = \frac{p\sqrt{R}}{(1+r)(1-a^2)(1-b^2)}.$$

Ponamus iam

$$\cos x = y = a - \frac{t}{\sqrt{i}}, \quad x' = b - \frac{t'}{\sqrt{i}},$$

erit

$$\frac{\sin^2 x \sin^{2r} x'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{1+r}} = \mu\left[1-\frac{\alpha tt-2\beta tt'+\gamma t't'}{i}+\frac{\delta}{\sqrt{i^3}}\dots\right]:$$

unde pro i infinito

$$\left[\frac{\sin^2 x \sin^{2r} x'}{(l+2l'\cos x+2l''\cos x')^{1+r}}\right]^i = \frac{\sin^{2i} x \sin^{2i'} x}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{i+i'}} = \mu^i e^{-[\alpha tt+2\beta tt'+\gamma t't']}.$$

Fit porro pro i infinito:

$$\frac{dx\,dx'}{(l+2l'\cos x+2l''\cos x')}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{[(1-a^2)(1-b^2)]}}\cdot\frac{1}{(l+2l'a+2l''b)^n}\cdot\frac{dt\,dt'}{i} = \frac{p^n\,dt\,dt'}{(1+r)^n\sqrt{[(1+a^2)(1-b^2)]}}.$$

Integrationis limites respectu ipsorum t, t' fiunt $-\infty$ et $+\infty$; inter quos limites habetur

$$\iint dt\,dt' e^{-[\alpha tt-2\beta tt'+\gamma t't']} = \frac{\pi}{\sqrt{(\alpha\gamma-\beta\beta)}} = \frac{\pi\sqrt{(1+r)}\sqrt{[(1-a^2)(1-b^2)]}}{\sqrt{p}.\sqrt[4]{R}}.$$

Unde tandem *pro i, i' infinitis evadit valor integralis*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n},$$

si i', i in ratione finita manent $\frac{i'}{i}=r$:

$$\pi.\frac{(-4)^{i+i}}{i}\cdot\frac{n(n+1)\dots(n+i+i'-1)}{1\,3\dots2i-1.1.3\dots2i'-1}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{R}[M-2l\sqrt{R}]^{\frac{2n-1}{4}}}\times$$
$$\frac{r\,(1-r)^{i+i'+\frac{2n-1}{2}}\,l'^i\,l''^{i'}}{[l-\sqrt{R}+\sqrt{(M-2l\sqrt{R})}]^i[\sqrt{R}-r^2l+\sqrt{(M-2l\sqrt{R})}]^{i'}};$$

ubi

$$R = r^2ll-4(1-r^2)(r^2l'l'-l''l''),$$
$$M = (1+r^2)ll-4(1-r^2)(l'l'-l''),$$

radicalibus positive acceptis.

Factorem numericum e (3.) etiam sic exhiberi licet:

$$\pi.\frac{(-4)^{i+i'}}{}\cdot\frac{n(n+1)\dots(n+i+i'-1)}{1.3\dots2i-1\;1.3\dots2i'-1}$$
$$= \pi^2(-2)^{i+i'}.\frac{n(n+1)\dots(n+i+i'-1)}{1.2\dots i.1.2\dots i'}\sqrt{r}.$$

Casu speciali, quo $i=i'$, $r=1$, *fit pro i infinito:*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos ix'\, dx\, dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}$$
$$= 2^i.\frac{n.n+1\ldots.n+2i-1}{1.2\ldots.i.1.2\ldots.i}.\frac{l^{n-1}}{E^{\frac{2n-1}{4}}}.\frac{l'^i l''^i}{[ll-4l'l'-4l''l''+\sqrt{E}]^i}.\pi^2,$$

posito

$$E=(l+2l'+2l'')(l+2l'-2l'')(l-2l'+2l'')(l-2l'-2l'').$$

Si statuitur

$$l=\frac{1+a^2}{1-a^2}+\frac{1+b^2}{1-b^2},\quad l'=\frac{-a}{1-a^2},\quad l''=\frac{-b}{1-b^2},$$

fit

$$ll-4l'l'-4l''l''=\frac{4(1+a^2b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)}\qquad \sqrt{E}=2l=\frac{4(1-a^2b^2)}{(1-a^2)(1-b^2)},$$

unde, *designantibus a, b quantitates reales unitate absolute minores, habetur pro i infinito:*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos ix'\, dx\, dx'}{\left[\frac{1-2a\cos x+a^2}{2(1-a^2)}+\frac{1-2b\cos x'+b^2}{2(1-b^2)}\right]^n}$$
$$=\frac{n.n+1.n+2\ldots.n+2i-1}{2.4\ldots.2i.2.4\ldots.2i}\sqrt{\left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{1-a^2b^2}\right)}.a^ib^i.\pi^2.$$

Quae satis simplices sunt formulae.

14.

Data occasione, addam pauca de integralibus

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}$$

eorumque similibus; quae alio loco demonstrabo. Ac primum observo generaliter, quod est theorema magni momenti, *designante Δ functionem ipsarum* $\cos x$, $\sin x$, $\cos x'$, $\sin x'$ *rationalem quamcumque, semper positivam, integralia*

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n},\qquad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \sin i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n},$$
$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n},\qquad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin ix \sin i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n}$$

pro diversis ipsorum i, i' valoribus integris omnia per numerum eorum finitum lineariter exprimi. **Et per eadem lineariter exprimuntur integralia illa pro exponentibus ipsius Δ a proposito n numero integro quolibet differentibus.**

Integralia

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^n}$$

omnia per *quatuor* ex eorum numero lineariter exprimi possunt. Si

$$\Delta = a + b\cos x + c\sin x + \cos x'(a'+b'\cos x + c'\sin x)$$
$$+ \sin x'(a''+b''\cos x + c''\sin x),$$

integralia

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n}, \qquad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \sin i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n},$$
$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n}, \qquad \int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin ix \sin i'x'\, dx\, dx'}{\Delta^n},$$

omnia per *septem* ex eorum numero lineariter exprimi possunt. Statuamus expressioni antecedenti ipsius Δ accedere duos terminos $d\cos 2x + d'\cos 2x'$, forma ipsius Δ convenit quadrato distantiae duarum planetarum, per anomalias earum excentricas expressae. Quo casu habetur theorema:

„*Duarum planetarum, quae in orbitis ellipticis moventur, distantia,*
„*ad potestatem quamcunque elata, si in seriem infinitam evolvenda*
„*proponitur, secundum cosinus ac sinus multiplorum anomaliarum*
„*earum excentricarum procedentem: evolutionis coëfficientes nu-*
„*mero dupliciter infinitae omnes per* q u i n d e c i m *ex earum nu-*
„*mero lineariter exprimi possunt.*"

Casu, quo summa ipsarum $2l'$, $2l''$ positive acceptarum ipsam l aequat, integralia

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{\frac{1}{2}}}$$

revocare contigit ad productum duorum integralium ellipticorum, quorum moduli alter alterius complementum. Sint enim l', l'' positivae, $l = l'+l''$, ac statuatur:

$$\varkappa^2 = \frac{\sqrt{(l'+l'')}-\sqrt{l''}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l''}}, \qquad \varkappa'^2 = \frac{2\sqrt{l''}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l''}},$$
$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{(l'+l'')}-\sqrt{l'}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l'}}, \qquad \lambda'^2 = \frac{2\sqrt{l'}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l'}},$$

inveni, quoties $i' \geqq i$:

$$\frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{1^2.3^2\ldots(2i-1)^2}{(2i'+2i-1)(2i'+2i-3)\ldots(2i'-2i+1)}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\, dx\, dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{(-1)^{i+\varkappa}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l''}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i'-2i}\varphi\,.\cos^{2i}\varphi\,[1-\varkappa^2\sin^2\varphi]^{2i-1}\, d\varphi\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2i}\varphi\cos^{2i}\varphi\,[1-\varkappa'^2\sin^2\varphi]^{2i'-2i-1}\, d\varphi;$$

quoties $i \geqq i'$:

$$\frac{4}{\pi^2}\frac{1^2.3^2\ldots.(2i'-1)^2}{(2i+2i'-1)(2i+2i'-3)\ldots.(2i-2i'+1)}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos ix \cos i'x'\,dx\,dx'}{[l+2l'\cos x+2l''\cos x']^{\frac{1}{2}}} =$$

$$\frac{(-1)^{i+i'}}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l''}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2i-2i'}\varphi.\cos^{2i'}\varphi.[1-\lambda^2\sin^2\varphi]^{2i'-1}d\varphi.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2i'}\varphi\cos^{2i'}\varphi[1-\lambda'^2\sin^2\varphi]^{2i-2i'-1}d\varphi.$$

Cum sit $\lambda = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$, modulus λ e modulo $\varkappa'$ per transformationem *Landenianam* provenit. Si

$$l+2l'\cos x+2l''\cos x' = 1+2a\left[\cos^2\frac{I}{2}\cos x+\sin^2\frac{I}{2}\cos x\,\right]+a^2,$$

eruitur casu quo $a=1$,

$$\varkappa = \operatorname{tang}\left(45^\circ-\frac{I}{4}\right),\qquad \lambda = \operatorname{tang}\frac{I}{4},$$

$$\frac{1}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l''}} = \frac{1}{1+\sin\frac{I}{2}},\qquad \frac{1}{\sqrt{(l'+l'')}+\sqrt{l'}} = \frac{1}{1+\cos\frac{I}{2}}.$$

Quae formulae casum concernunt, quo duarum planetarum distantiae mediae a sole inter se aequales existunt. Quo casu evolutiones vulgares secundum inclinationis potestates deficiunt.

E formulis antecedentibus, quae satis difficiles indagatu erant, aliae multae et ipsae valde memorabiles fluunt; de quibus omnibus alio loco nobis agendum erit. Si $i=i'$, duae prodeunt duplicis integralis repraesentationes per simplicia, quae per substitutionem

$$\cos\varphi\,\Delta(\lambda,\varphi) = \sin 2\psi,$$

altera ad alteram revocantur.

15.

Si in formula (7.) substituimus loco $\sin^{2i}x$ eius evolutionem secundum cosinus multiplorum ipsius $2x$, provenit:

$$37.\qquad \int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx =$$

$$\frac{1}{2.4.6\ldots.2i}\int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\left[1-2.\frac{i}{i+1}\cos 2x+2.\frac{i.i-1}{i+1.i+2}\cos 4x-\ldots.\right]dx.$$

Ubi singula integralia rursus per eandem (37.) transformantur posito successive $i=2, 4, 6$ etc., prodit

$$2.4.6\ldots.2i\int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx =$$

$$\int_0^\pi dx\Big[f^{(i)}-2.\frac{i}{i+1}.\frac{f^{(i+2)}}{2.4}\left(1-\frac{4}{3}\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 4x\right)$$

$$+2\,\frac{i.i-1.i-2}{i+1.i+2.i+3}\,\frac{f^{(i+4)}}{2.4.6.8}\left(1-\frac{8}{5}\cos 2x+\frac{4}{5}\cos 4x-\frac{8}{5.7}\cos 6x+\frac{1}{5.7}\cos 8x\right)+\ldots\Big].$$

Qua repetita transformatione pervenimus ad seriem infinitam, per quam integrale propositum repraesentare licet,

$$38. \quad \int_0^\pi f(\cos x) \cos ix \, dx = \int_0^\pi dx \left[\alpha f^{(i)} - \beta f^{(i+2)} + \gamma f^{(i+4)} - \delta f^{(i+6)} + \dots\right],$$

ubi $f^{(m)}$ designat ipsius $\frac{d^m f(z)}{dz^m}$ valorem pro $z = \cos x$, atque $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ sunt numeri constantes.

Sit $fz = \cos(\varkappa z)$, i numerus par, erit e (38.):

$$\int_0^\pi \cos(\varkappa \cos x) \cos ix \, dx$$

$$= (-1)^{\frac{i}{2}} \varkappa^i \int_0^\pi dx \cos(\varkappa \cos x) \left[\alpha + \beta \varkappa^2 + \gamma \varkappa^4 + \delta \varkappa^6 + \dots\right].$$

Sit $f(z) = \sin(\varkappa z)$, i numerus impar, erit e (38.):

$$\int_0^\pi \sin(\varkappa \cos x) \cos ix \, dx$$

$$= (-1)^{\frac{i-1}{2}} \varkappa^i \int_0^\pi dx \cos(\varkappa \cos x) \left[\alpha + \beta \varkappa + \gamma \varkappa^4 + \delta \varkappa^6 + \dots\right].$$

Unde pro i sive pari sive impari fit e §. 9.:

$$39. \quad \alpha + \beta \varkappa^2 + \gamma \varkappa^4 + \delta \varkappa^6 + \dots = \frac{I_\varkappa^{(i)}}{\varkappa^i I_\varkappa^{(0)}} =$$

$$\frac{i}{2.4.6\dots 2i} \cdot \frac{1 - \frac{\varkappa^2}{2.2i+2} + \frac{\varkappa^4}{2.4.2i+2.2i+4} - \frac{\varkappa^6}{2.4.6\, 2i+2.2i+4.2i+6} + \dots}{1 - \frac{\varkappa^2}{2^2} + \frac{\varkappa^4}{2^2.4^2} - \frac{\varkappa^6}{2^2.4^2.6^2} + \dots};$$

de qua formula numerorum $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$ determinatio peti potest.

9. Juli 1835.

2.

Über den Ort sämmtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften.

Als Fortsetzung der Untersuchung über einen Mittelpunct nicht paralleler Kräfte; Bd. 14. Hft. 4.

(Vom Hrn. Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

In den Formeln (73.), (74.), (75.) der Abhandlung 21. des 14ten Bandes kann man P und P_1 gleich Null annehmen, also überhaupt p, q, r als Seitenkräfte in drei beliebigen auf einander senkrechten Richtungen ansehen, deren Neigungen gegen die Kräfte unveränderlich gedacht werden. Wie schon früher geschehen, werde auch ferner der Anfang der Coordinaten so gewählt, daſs sei:

$$134. \quad \begin{cases} Q' = pp' + qq' + rr' = 0, \\ Q'' = pp'' + qq'' + rr'' = 0, \\ Q''' = pp''' + qq''' + rr''' = 0. \end{cases}$$

Der so bestimmte Anfang der Coordinaten soll von jezt an der Centralpunct des Systemes genannt werden. Geschieht insbesondere die Zerlegung nach drei auf einander senkrechten Richtungen, von denen eine der aus allen Kräften zusammengesetzten Mittelkraft parallel ist, so wird $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$, also nach (134.) $p' = 0$, $p'' = 0$, $p''' = 0$. Es bedeuten aber $\frac{p'}{p}$, $\frac{p''}{p}$, $\frac{p'''}{p}$ überhaupt die Coordinaten des Schwerpunctes aller mit p parallelen Seitenkräfte; folglich fällt der Centralpunct mit dem Schwerpuncte der der Mittelkraft parallelen Seitenkräfte zusammen. Dies ist aber im Allgemeinen nicht mehr der Fall, wenn die Kräfte nach drei nicht auf einander senkrechten Richtungen, von denen eine der Mittelkraft parallel ist, zerlegt werden. — Die Gleichung einer durch den Centralpunct senkrecht auf den Durchschnitt beider Mittel-Ebenen (123.) gelegten Ebene ist:

$$135. \quad W'x + W''y + W'''z = 0.$$

Man erhält aber, wenn aus (134.) p, q, r eliminirt werden:

$$p'(q''r''' - q'''r'') + q'(r''p''' - p''r''') + r'(p''q''' - p'''q'') = 0,$$

daher nach (114.), (119.), (120.):

$$W'p' + W''p'' + W'''p''' = 0,$$
$$W'q' + W''q'' + W'''q''' = 0,$$
$$W'r' + W''r'' + W'''r''' = 0.$$

Die Ebene (135.) geht mithin durch die Schwerpuncte der mit p, q, r parallelen Seitenkräfte des Systemes. Sie heifse die **Central-Ebene**. Es ist klar, dafs, wie man auch die Kräfte des Systemes nach irgend drei Richtungen, senkrecht oder nicht, zerlegen mag, die drei den parallelen Seitenkräften zugehörigen Schwerpuncte immer in derselben Ebene, also in der Central-Ebene, liegen müssen. Werden daher die Axen der x und y in dieser Central-Ebene angenommen, so ist $p'''=0$, $q'''=0$, $r'''=0$, oder überhaupt (79.) $Z=0$, $Z'=0$, $Z''=0$. Zugleich fällt dann die Axe der z in den Durchschnitt der beiden Mittel-Ebenen.

Hinsichtlich der Lage dieser drei Schwerpuncte bieten sich die folgenden Fälle dar:

Erstens die drei Schwerpuncte fallen in einen einzigen Punct zusammen. Dieser ist dann zugleich der Centralpunct des Systemes; die Gröfsen p', p''; q', q'', r', r'' sind mithin sämmtlich Null; zugleich verschwinden auch (77., 78.) X, X', X'', Y, Y', Y''; folglich wird die Bedingung $V=0$ in jeder Lage des Systemes befriedigt, oder das System hat in jeder Lage eine durch den Centralpunct gehende Resultante.

Zweitens die drei Schwerpuncte liegen in einer Geraden. Offenbar werden sie dann immer in dieser Geraden bleiben, wie man auch die Kräfte zerlegen mag. Wird diese Gerade, in welcher sich auch der Centralpunct befinden mufs, zur Axe der x genommen, so verschwinden mit p'', q''; r'' zugleich Y, Y', Y'', daher die Bedingungsgleichung (60.) übergeht in:

136. $(\Pi'X - \Pi X')\sin\psi\sin\theta + (\Pi X'' - \Pi''X)f + (\Pi''X' - \Pi'X'')g = 0.$

Zur Vereinfachung der Formeln nehme man q und r senkrecht auf der Mittelkraft, also p parallel mit ihr, so wird $p=1$, $q=0$, $r=0$, daher auch noch $p'=0$. Alsdann ist nach (76.), (77.):

137. $\Pi = \sin\lambda, \quad \Pi' = 0, \quad \Pi'' = \cos\lambda,$

138. $X = (r'\sin u - q'\cos u)\cos\lambda, \quad X' = q'\sin u + r'\cos u,$
$X'' = (q'\cos u - r'\sin u)\sin\lambda.$

Zur Bestimmung der Mittel-Ebene erhält man sofort, nach (80.), (81):

139. $\Pi'' = \cos\lambda = 0, \quad X''\cos\theta = 0, \quad X''\cos\psi\sin\theta = 0.$

Ferner nach (90.), da $\varrho' = -q'$, $\varkappa' = r'$ ist,

$$140. \quad (q' \cos u - r' \sin u)(r' \cos u + q' \sin u) = 0,$$

also entweder

$$141. a. \quad r' \cos u + q' \sin u = 0,$$

oder

$$141. b. \quad q' \cos u - r' \sin u = 0.$$

Wird der Werth von u aus (141. a) gewählt, so ist nach (138.) X nicht Null, mithin muſs um den Bedingungen (139) zu genügen, gesetzt werden $\cos\theta = 0$, $\cos\psi = 0$. Daher wird die Gleichung der Mittel-Ebene (61.)

$$142. \quad x = 0,$$

sie ist also die Ebene yz, in welcher alle Resultanten im Centralpuncte zusammentreffen. Wird ferner der Werth von u aus (141. b.) genommen, so ist $X'' = 0$, und die Lage der Mittel-Ebene wird nach (61.) unbestimmt. Die Bedingung (166.) giebt jedoch in diesem Falle $\sin\psi = 0$, folglich als Gleichung für alle Mittel-Ebenen, nach (61.)

$$143. \quad y . \sin\theta - z . \cos\theta = 0,$$

und für die in ihnen befindlichen Durchschnittspuncte der Resultanten (vergl. 100., 68.):

$$144. \quad y = \sqrt{(q'^2 + r'^2)} . \cos\theta, \qquad z = \sqrt{(q'^2 + r'^2)} . \sin\theta.$$

Mithin gehen, wenn die drei Schwerpuncte in einer Geraden (Central-Axe) liegen, die sämmtlichen Resultanten durch diese und einen auf ihr senkrechten Kreis, dessen Mittelpunct der Centralpunct ist. — Von der Entstehung dieses Kreises kann man sich übrigens auf folgende Weise anschaulich Rechenschaft geben:

Nämlich wenn die Kräfte eines Systemes ohne Änderung der gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte gedreht werden, so drehen sich die Summen ihrer nach irgend drei Richtungen genommenen Seitenkräfte um die ihnen zugehörigen Schwerpuncte, welche fest bleiben. Hierbei wird nun vorausgesetzt, daſs keiner der Schwerpuncte in unendliche Entfernung fällt. Liegen also die drei Schwerpuncte in einer Geraden, so kann man sich begnügen, statt des vorgelegten Systemes drei Kräfte zu betrachten, deren Angriffspuncte in einer Geraden liegen. Ist dieses System so gestellt, daſs seine Kräfte sich durch eine einzige ersetzen lassen, so geht diese ebenfalls durch jene Gerade oder Central-Axe. Eine Ebene E, durch die Resultante und die Central-Axe gelegt, ist aber nothwendig eine Mittel Ebene. Denn man zerlege die Kräfte nach drei Richtungen, senkrecht aufeinander, und die eine senkrecht auf der Ebene E so ist zuvörderst die Summe der Seitenkräfte in dieser auf

E senkrechten Richtung Null. Ferner ist das zusammengesetzte Paar, in einer auf der Resultante senkrechten Ebene, nach der Voraussetzung Null; daraus folgt aber in dem vorliegenden Falle, dafs auch das Paar, welches die auf der Ebene E senkrechten Seitenkräfte bilden, verschwinden mufs; w. z. b. w. Da also die Ebene E eine Mittel-Ebene ist, so enthält sie einen Strahlbüschel von Resultanten. Unter diesen Resultanten giebt es eine, welche senkrecht auf der Central-Axe steht. Man gebe dem Systeme die zu dieser Resultante gehörige Stellung, zerlege hierauf die Kräfte nach drei auf einander senkrechten Richtungen, die erste parallel mit dieser Resultante, die zweite parallel mit der Central-Axe, so heben sich die Seitenkräfte in der Central-Axe völlig auf, mithin mufs die senkrecht auf der Central-Axe stehende Resultante durch den Schwerpunct der ihr parallelen Seitenkräfte, d. h. durch den Centralpunct gehen. Wird sodann das ganze System, gehörig gestellt, mit der Mittel-Ebene um die Central-Axe gedreht, so ändert sich dadurch nichts in den gegenseitigen Verhältnissen seiner Bestandtheile; es bleibt mithin der Mittelpunct des Strahlbüschels in der bewegten Mittel-Ebene fest, und beschreibt also den in Rede stehenden Kreis.

Ich gehe jetzt zu dem allgemeinen Falle über, in welchem die drei Schwerpuncte nicht in einer Geraden liegen. Von dem Dreiecke, welches sie zu Spitzen hat, läfst sich folgender Satz beweisen:

Wie man auch die Kräfte eines Systemes nach drei beliebigen Richtungen zerlegen mag, so ist das Product aus dem Dreiecke, welches die drei Schwerpuncte der einander parallelen Seitenkräfte zu Spitzen hat, in das Tetraëder, wovon die Summen dieser Seitenkräfte, der Richtung und Gröfse nach, drei zusammenstofsende Kante bilden, jedesmal von derselben Gröfse.

Denn es seien P_1, P_2, P_3 die Summen der drei Seitenkräfte für eine beliebige schiefwinklige Zerlegung, x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3 die Coordinaten ihrer Angriffspuncte in der Central-Ebene; ferner p, q, r drei auf einander senkrechte Componenten desselben Systemes, deren Angriffspuncte die Coordinaten $\frac{p'}{p}$, $\frac{p''}{p}$; $\frac{q'}{q}$, $\frac{q''}{q}$; $\frac{r'}{r}$, $\frac{r''}{r}$ haben; so kann man setzen (vergl. 73., 75.):

$$145. \quad \begin{cases} p = P_1 \cos\pi_1 + P_2 \cos\pi_2 + P_3 \cos\pi_3, \\ q = P_1 \sin\pi_1 \cos\varkappa_1 + P_2 \sin\pi_2 \cos\varkappa_3 + P_3 \sin\pi_3 \cos\varkappa_3, \\ r = P_1 \sin\pi_1 \sin\varkappa_1 + P_2 \sin\pi_2 \sin\varkappa_3 + P_3 \sin\pi_3 \sin\varkappa_3. \end{cases}$$

Ferner in kürzeren Zeichen:

$$146. \begin{cases} p' = \Sigma Px \cos\pi, & q' = \Sigma Px \sin\pi \cos\varkappa, & r' = \Sigma Px \sin\pi \sin\varkappa, \\ p'' = \Sigma Py \cos\pi, & q'' = \Sigma Py \sin\pi \cos\varkappa, & r'' = \Sigma Py \sin\pi \sin\varkappa. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln ergiebt sich:

$$147. \begin{cases} q''r' - q'r'' = + P_1P_2(y_1x_2 - y_2x_1) \sin\pi_1 \sin\pi_2 \sin(\varkappa_2 - \varkappa_1) \\ \qquad + P P_3(y_2x_3 - y_3x_2) \sin\pi_2 \sin\pi_3 \sin(\varkappa_3 - \varkappa_2) \\ \qquad + P_3P_1(y_3x_1 - y_1x_3) \sin\pi_3 \sin\pi_1 \sin(\varkappa_1 - \varkappa_3), \\ r''p' - r'p'' = + P_1P_2(y_1x_2 - y_2x_1)(\sin\pi_1 \cos\pi_2 \sin\varkappa_1 - \sin\pi_2 \cos\pi_1 \sin\varkappa_2) \\ \qquad + P_2P_3(y_2x_3 - y_3x_2)(\sin\pi_2 \cos\pi_3 \sin\varkappa_2 - \sin\pi_3 \cos\pi_2 \sin\varkappa_3) \\ \qquad + P_3P_1(y_3x_1 - y_1x_3)(\sin\pi_3 \cos\pi_1 \sin\varkappa_3 - \sin\pi_1 \cos\varkappa_3 \sin\varkappa_1), \\ p''q' - p'q'' = + P_1P_2(y_1x_2 - y_2x_1)(\sin\pi_2 \cos\pi_1 \cos\varkappa_2 - \sin\pi_1 \cos\pi_2 \cos\varkappa_1) \\ \qquad + P_2P_3(y_2x_3 - y_3x_2)(\sin\pi_3 \cos\pi_2 \cos\varkappa_3 - \sin\pi_2 \cos\pi_3 \cos\varkappa_2) \\ \qquad + P_3P_1(y_3x_1 - y_1x_3)(\sin\pi_1 \cos\pi_3 \cos\varkappa_1 - \sin\pi_3 \cos\pi_1 \cos\varkappa_3). \end{cases}$$

Wird das Dreieck, welches die Angriffspuncte der Kräfte p, q, r zu Spitzen hat, mit Δ bezeichnet, so erhellet aus dem Werthe von W''' (120.) sofort, daſs:

$$148. \quad W''' = \pm pqr.2\Delta.$$

Wird ferner das Dreieck, dessen Spitzen die Angriffspuncte der Kräfte P_1, P_2, P_3 sind, mit D bezeichnet, so ist

$$149. \quad \pm 2D = y_1x_2 - y_2x_1 + y_2x_3 - y_3x_2 + y_3x_1 - y_1x_3.$$

Den Richtungen der Kräfte p, q, r, P_1, P_2, P_3 entsprechen auf der Kugel sechs Puncte, von denen die drei ersten die Spitzen eines sphärischen Dreiecks mit drei rechten Winkeln sind. Die in den vorstehenden Formeln vorkommenden Buchstaben π_1, π_2, π_3 bedeuten Bogen, welche den Punct p mit den Puncten P_1, P_2, P_3 verbinden, und welche mit dem Kreise pq die Winkel $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ einschlieſsen. Man nehme die von den Bogen π_1, π_2, π_3 eingeschlossenen Winkel P_1pP_2, P_2pP_3, P_3pP_1 so, daſs ihre Summe vier Rechte betrage. Alsdann ist,

$$\varkappa_2 - \varkappa_1 = P_1pP_2, \quad \varkappa_3 - \varkappa_2 = P_2pP_3, \quad 2\pi + \varkappa_1 - \varkappa_3 = P_3pP_1.$$

Man bilde sofort die Producte:

$$150. \begin{cases} \sin\pi_1 \sin\pi_2 \sin(\varkappa_2 - \varkappa_1) = \mathfrak{M}_3, \\ \sin\pi_2 \sin\pi_3 \sin(\varkappa_3 - \varkappa_2) = \mathfrak{M}_1, \\ \sin\pi_3 \sin\pi_1 \sin(\varkappa_1 - \varkappa_3) = \mathfrak{M}_2, \end{cases}$$

welche die sphärischen Moduln der Dreiecke pP_1P_2, pP_2P_3, pP_3P_1 darstellen. Wird sodann mit $\mathfrak{M}$ der Modul des Dreiecks $P_1P_2P_3$ bezeichnet,

so ist

$$151. \quad \mathfrak{M}_1 \cos\pi_1 + \mathfrak{M}_2 \cos\pi_2 + \mathfrak{M}_3 \cos\pi_3 = \mathfrak{M}.$$

Dieser Satz ist der unmittelbare Ausdruck der Formel (4.)

$$Aa + A'a' + A''a'' = \mathfrak{M},$$

wenn in derselben die Werthe von A, A', A'' aus (27.), (28.), (29.) eingesetzt werden. Bildet man endlich vermittelst der Formeln (145.), (147.) einen zweiten Ausdruck für W''', so ergiebt sich derselbe wie folgt;

$$W''' = P_1 P_2 P_3 . 2D(\mathfrak{M}_1 \cos\pi_1 + \mathfrak{M}_2 \cos\pi_2 + \mathfrak{M}_3 \cos\pi_3),$$

mithin ist

$$152. \quad pqr.\Delta = P_1 P_2 P_3 . \mathfrak{M}.D, \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Es ist klar, dafs wenn eine der Seitenkräfte, z. B. P_1, Null ist, das Dreieck D unendlich grofs wird. Der Satz bleibt daher auch in diesem Falle richtig.

Es handelt sich nun noch um die Bestimmung des Ortes der Resultanten. Man nehme, wie bisher, den Centralpunct zum Anfange der Coordinaten, die Central-Ebene zur Ebene der x und y, zerlege die Kräfte parallel mit der Mittelkraft und senkrecht darauf, so ist:

$$153. \quad p=1,\ q=0,\ r=0,\ p'=0,\ p''=0,\ p'''=0,\ q'''=0,\ r'''=0.$$

Zur Bestimmung der beiden Mittel-Ebenen ergiebt sich unter diesen Voraussetzungen aus (90.) die Gleichung:

$$154. \begin{cases} (r' \sin u - q' \cos u)(r' \cos u + q' \sin u) \\ \quad + (r'' \sin u - q'' \cos u)(r'' \cos u + q'' \sin u) = 0, \\ \text{oder} \\ (\operatorname{tang} u)^2 + \dfrac{r'^2 + r''^2 - q'^2 - q''^2}{r'q' + r''q''} \operatorname{tang} u = 1, \\ \text{oder auch} \\ \operatorname{tang} 2u = \dfrac{2(r'q' + r''q'')}{r'^2 + r''^2 - q'^2 - q''^2}. \end{cases}$$

Dieser Gleichung zufolge sind die beiden Werthe von $\operatorname{tang} u$ immer vorhanden, mithin können auch die beiden Mittel-Ebenen niemals fehlen. Ihre Gleichungen sind, da die beiden Werthe von u sich durch u und $\frac{1}{2}\pi + u$ ausdrücken lassen, nach (91.) folgende:

$$155. \begin{cases} (r' \sin u - q' \cos u)x + (r'' \sin u - q'' \cos u)y = 0, \\ (r' \cos u + q' \sin u)x + (r'' \cos u + q'' \sin u)y = 0. \end{cases}$$

In Verbindung mit (154.) geht aus denselben hervor, dafs beide Mittel-Ebenen senkrecht auf einander stehen. Es ist daher gestattet, ihre Durchschnitte mit der Central-Ebene zu Axen der x und y zu wählen, wie fortan geschehen soll. Alsdann müssen die Gleichungen

$$r'\sin u - q'\cos u = 0, \qquad r''\cos u + q''\sin u = 0$$

für denselben Werth von u beide zugleich bestehen, und folglich, durch diese Wahl der Coordinaten, die Bedingung

156. $\quad q'q'' + r'r'' = 0$ erfüllt werden.

Nämlich in der Central-Ebene werden durch die Coordinaten des anfänglichen Systemes $x' = q'$, $y' = q''$; $x'' = r'$, $y'' = r''$, zwei Puncte bestimmt, gegen welche die Durchschnitte der Mittel-Ebenen mit der Central-Ebene so liegen, daſs, wenn man sie zu Axen eines neuen Coordinatensystemes wählt, die beiden Rechtecke aus den Coordinaten jedes Punctes einander gleich und entgegengesetzt werden. Sind also der Centralpunct und die beiden erwähnten Puncte in der Central-Ebene festgelegt, so lassen sich die Durchschnitte der beiden Mittel-Ebenen mit der Central-Ebene aus dieser Bedingung leicht finden. Wird der Ausdruck $q'q'' + r'r''$ durch Einsetzung der Werthe von q', q'', r', r'' entwickelt, so ergiebt sich:

157. $\quad q'q'' + r'r''$

$$= P_1^2 x_1 y_1 \sin\pi_1^2 + P_2^2 x_2 y_2 \sin\pi_2^2 + P_1 P_2 (x_1 y_2 + x_2 y_1)\sin\pi_1 \sin\pi_2 \cos(k_2 - k_1) + \ldots$$

in welcher Formel P_1, P_2, ... die Kräfte des Systemes, x_1, y_1, ... die beiden ersten in der Central-Ebene liegenden und vom Centralpuncte anfangenden Coordinaten ihrer Angriffspuncte, π_1, π_2, ... die Neigungen der Kräfte gegen die Mittelkraft p, endlich $k_2 - k_1$, ... die Neigungen der Ebenen pP_1, pP_2, ... gegen einander bedeuten. Durch eine Drehung des Coordinatensystemes kann der vorstehende Ausdruck (157.) allemal auf den Werth Null gebracht, und damit zugleich die Lage der beiden Mittel-Ebenen gefunden werden. Dagegen erleidet derselbe weder durch die Drehung der Kräfte, noch durch die beliebige Wahl der auf einander und auf der Mittelkraft senkrechten Richtungen der Seitenkräfte, irgend eine Änderung. Der Einfluſs dieser Wahl auf die Lage der Puncte $(q'q'')$, $(r'r'')$ läſst sich aber zu einer noch gröſseren Vereinfachung der Rechnung benutzen. Nimmt man nämlich an, daſs die Winkel k_1, k_2, k_3, ... sämmtlich um ein Gleiches (u) vermehrt werden, so verwandeln sich die Gröſsen

$$158. \quad \begin{cases} q' = \Sigma Px \sin\pi \cos k & \text{in} \quad x' = q' \cos u - r' \sin u, \\ q'' = \Sigma Py \sin\pi \cos k & \text{in} \quad y' = q'' \cos u - r'' \sin u, \\ r' = \Sigma Px \sin\pi \sin k & \text{in} \quad x'' = r' \cos u + q' \sin u, \\ r'' = \Sigma Py \sin\pi \sin k & \text{in} \quad y'' = r'' \cos u + q'' \sin u. \end{cases}$$

Dabei bleibt, wie leicht zu sehen, $x'y' + x''y'' = q'q'' + r'r'' = 0$. Aus den Gleichungen (158.) ergiebt sich, dafs die beiden Puncte $(x'y')$, $(x''y'')$, wenn mit dem Werthe von u zugleich ihre Lage geändert wird, auf einer Ellipse fortrücken, deren Haupt-Axen in die Durchschnitte der Mittel-Ebenen mit der Central-Ebene fallen, und deren Gleichung ist:

$$159. \qquad \frac{x^2}{q'^2+r'^2} + \frac{y^2}{q''^2+r''^2} = 1.$$

Man wähle demnach den Winkel u so, dafs die beiden Puncte $(x'y')$, $(x''y'')$ in die Haupt-Axen der Ellipse (159.) fallen, d. h. man nehme $x''=0$, wodurch zugleich $y'=0$ wird; so kann, um die Bedingung (156.) zu befriedigen, gesetzt werden:

$$160. \qquad r' = 0, \qquad q'' = 0,$$

welche Annahmen den in (153.) enthaltenen beizufügen sind.

Die bisher zur Feststellung der beiden Mittel-Ebenen beobachtete Unterscheidung zweier rechtwinkliger Zerlegungen fallen lassend, setze man in den Formeln (76.), (77.), (78.) $\sin\lambda = 1$, $\sin u = 1$; so wird:

$$\Pi = 1, \quad \Pi' = 0, \quad \Pi'' = 0, \quad X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad Y' = 0,$$
$$X'' = 0, \quad Z' = 0, \quad Z'' = 0, \quad X' = q', \quad Y'' = -r'';$$

daher (57.—63.)

$$161. \quad \begin{cases} l = g, \quad m = k, \quad n = \sin\varphi\sin\theta, \\ L = -r''\cos\theta, \quad M = q'\cos\varphi\sin\theta, \quad N = -r''\sin\psi\sin\theta - q't, \end{cases}$$
$$q'\sin\psi\sin\theta + r''t = -V = 0,$$

oder:

$$162. \qquad (q'\sin\theta + r''\sin\varphi)\sin\psi + r''\cos\varphi\cos\theta\cos\psi = 0,$$

$$163. \quad \begin{cases} \sin\varphi\sin\theta\,.\,y - kz = r''\cos\theta, \\ \sin\varphi\sin\theta\,.\,x - gz = q'\cos\varphi\sin\theta, \\ \qquad\qquad kx - gy = r''\sin\psi\sin\theta + q't'. \end{cases}$$

Von den drei letzten Gleichungen dienen zwei beliebige, mit Hülfe der Bedingung (162.), zur Bestimmung der Lage der Resultante. Es soll sofort gezeigt werden, dafs ihnen immer auf zwei verschiedene Arten, unabhängig von φ und θ, Genüge geleistet werden kann. Nämlich man setze **erstens** in (163.) $y=0$, so wird, wenn man statt r'' und q' von jetzt an blofs r und q schreibt:

$$164. \quad \begin{cases} -kz = r\cos\theta, \\ kx = r\sin\psi\sin\theta + qt. \end{cases}$$

Nun sei

$$\Lambda^2 = (q\sin\theta + r\sin\varphi)^2 + (r\cos\varphi\cos\theta)^2,$$

so folgt aus (162.)

165. $\Lambda \sin\psi = -r\cos\varphi\cos\theta$, $\Lambda\cos\psi = q\sin\theta + r\sin\varphi$.

Hierdurch wird, nach Wegschaffung des Winkels ψ,

$$166. \quad \begin{cases} \Lambda k = (r + q\sin\varphi\sin\theta)\cos\theta, \\ \Lambda(r\sin\psi\sin\theta + qt) = (q^2 - r^2)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta. \end{cases}$$

Ferner aus (164.)

$$167. \quad \begin{cases} (r + q\sin\varphi\sin\theta)z = -\Lambda r, \\ (r + q\sin\varphi\sin\theta)x = -(r^2 - q^2)\cos\varphi\sin\theta. \end{cases}$$

Weil aber $(r + q\sin\varphi\sin\theta)^2 = \Lambda^2 + (r^2 - q^2)\cos\varphi^2\sin\theta^2$ ist, so ergiebt sich aus (167.) eine von φ und θ unabhängige Gleichung zwischen z und x, nämlich:

$$\frac{z^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2 - q^2} = 1.$$

Man setze zweitens in (163.) $x = 0$, so wird:

$$168. \quad \begin{cases} gz = -q\cos\varphi\sin\theta, \\ gy = -r\sin\psi\sin\theta - qt, \end{cases}$$

ferner nach (165.)

$$169. \quad \Lambda g = (q + r\sin\varphi\sin\theta)\cos\varphi\sin\theta,$$

mithin

$$170. \quad \begin{cases} (q + r\sin\varphi\sin\theta)z = -\Lambda q, \\ (q + r\sin\varphi\sin\theta)y = -(q^2 - r^2)\cos\theta. \end{cases}$$

Wiederum aber findet sich $(q + r\sin\varphi\sin\theta)^2 = \Lambda^2 + (q^2 - r^2)\cos\theta^2$; daher:

$$\frac{z^2}{q^2} + \frac{y^2}{q^2 - r^2} = 1.$$

Da man also den Gleichungen (163.) durch jede der beiden Annahmen, nämlich:

$$171. \quad y = 0, \quad \frac{z^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2 - q^2} = 1,$$

$$172. \quad x = 0, \quad \frac{z^2}{q^2} + \frac{y^2}{q^2 - r^2} = 1$$

Genüge leisten kann, so ist bewiesen, daſs jede Resultante die beiden durch die vorstehenden Gleichungen bestimmten Kegelschnitte trifft. Von diesen ist offenbar im Allgemeinen der eine eine Ellipse, der andere eine Hyperbel; sie haben den Centralpunct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte, und liegen in den beiden auf einander senkrechten Mittel-Ebenen so, daſs die Scheitel des einen mit den Brennpuncten des andern zusammenfallen. Will man für die Gröſse ihrer Axen den vollständigen Ausdruck haben, so ergiebt sich mit Rücksicht auf (160.):

$$q^2 = P_1^2 x_1^2 \sin \pi_1^2 + P_2^2 x_2^2 \sin \pi_2^2 + 2 P_1 P_2 x_1 x_2 \sin \pi_1 \sin \pi_2 \cos(k_2 - k_1) + \dots$$
$$r^2 = P_1^2 y_1^2 \sin \pi_1^2 + P_2^2 y_2^2 \sin \pi_2^2 + 2 P_1 P_2 y_1 y_2 \sin \pi_1 \sin \pi_2 \cos(k_2 - k_1) + \dots$$

Als besonderer Fall ist derjenige bemerkenswerth, in welchem $q^2 = r^2$ ist, mithin die kleinere Axe der Ellipse und die ihr gleiche der Hyperbel verschwindet. Alsdann tritt an die Stelle dieser beiden Curven die Axe der z, in welcher die Brennpuncte und die Scheitel, auf jeder Seite der Central-Ebene, in einen Punct zusammenfallen, dessen Abstand vom Centralpuncte $\pm q$ beträgt. Nach dem allgemeinen Satze mufs jede Resultante des Systemes beide Kegelschnitte treffen; sie mufs also, in dem vorliegenden Falle, wenigstens durch einen jener beiden Puncte gehen. Man setze in den Gleichungen (161.), (162.), (163.) $r = q$, so wird wegen (162.) $N = 0$; daher darf $x = 0$, $y = 0$ angenommen werden, woraus sich ergiebt:

$$kz = -q \cos \theta,$$
$$gz = -q \cos \varphi \sin \theta.$$

Durch Addition der Quadrate dieser beiden Gleichungen findet man sofort:

$$z^2 = q^2, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Aus (154.) folgt noch, dafs die Lage der Mittel-Ebene in diesem Falle unbestimmt wird. In der That kann jede durch die Axe der z gelegte Ebene als eine Mittel-Ebene angesehen werden. — Ein anderer schon oben betrachteter besonderer Fall ist der, wenn eine der Gröfsen q, r Null wird. Die Ellipse verwandelt sich dann in einen Kreis, und die Hyperbel in die Central-Axe desselben.

Es kann auf verschiedene Arten gezeigt werden, dafs auch umgekehrt jede Linie, welche einen Punct der Ellipse mit irgend einem Puncte der Hyperbel verbindet, zu irgend einer Stellung des Systemes als einzige Resultante gehört. Man wird z. B. aus den Gleichungen (163.) finden, dafs sich durch jeden Punct in der Central-Ebene vier verschiedene Resultanten legen lassen, welche, wenn der Punct zugleich in der Ebene der Ellipse oder der Hyperbel liegt, paarweise, und wenn der Punct der Centralpunct ist, alle vier in eine Gerade fallen, — übereinstimmend mit der geometrischen Anschauung. — Im Allgemeinen sind je vier Resultanten einander parallel, mit besonderer Ausnahme jedoch derjenigen beiden Schaaren von Resultanten, welche den Asymptoten der Hyperbel parallel sind. Um diese zu finden, sei z. B. $r > q$, so fällt die Hyperbel in die Ebene xy, und alle mit den Asymptoten parallelen Resultanten müssen senkrecht

auf der Axe x stehen. Setzt man nun $q+r\sin\varphi\sin\theta=0$, so wird $g=0$, und es ergeben sich die gesuchten Resultanten sämmtlich.

Um ferner im Allgemeinen die vier einander parallelen Resultanten durch Rechnung zu finden, seien die Cosinus a, b, c der Winkel, welche ihre Richtung mit den Axen x, y, z bildet, nach Gröfse und Zeichen gegeben, so mufs sein:

$$g=a,\quad k=b,\quad n=c;$$

mithin (166., 169.)

$$\sin\varphi\sin\theta=c,\qquad \cos\varphi\sin\theta=\frac{a(r+qc)}{b(q+rc)}\cos\theta.$$

Sind θ', φ', ψ' drei Werthe, welche den vorstehenden Gleichungen genügen, so leisten dies auch die Werthe $\pi-\theta'$, $\pi-\varphi'$, $\pi+\psi'$. Jene geben für die Resultante

$$cy-bz=r\cos\theta',\qquad cx-az=q\cos\varphi'\sin\theta',$$

diese:

$$cy-bz=-r\cos\theta',\qquad cx-az=-q\cos\varphi'\sin\theta'.$$

Dabei verhalten sich die beiden zu diesen Resultanten gehörigen Stellungen des Systemes so, dafs das Bündel, um aus der einen in die andere zu gelangen, eine halbe Umdrehung um die festbleibende Richtung der Resultante machen mufs.

Die anderen Resultanten von gleicher Richtung ergeben sich jedoch aus den vorstehenden Gleichungen nicht; man findet sie aber, wenn man, die Zeichen von a, b, c sämmtlich umkehrend, setzt:

$$g=-a,\quad k=-b,\quad \sin\varphi\sin\theta=-c,\quad \cos\varphi\sin\theta=\frac{a(r-qc)}{b(q-rc)}\cos\theta.$$

Übrigens ist offenbar, dafs jede die Ellipse und Hyperbel verbindende Gerade eine Resultante in doppeltem Sinne darstellt, weil mit Umkehrung aller Kräfte zugleich die Resultante sich umkehrt, ohne ihren Ort zu ändern.

Das Ergebnifs der Untersuchung läfst sich demnach zusammenfassen in den folgenden

Lehrsatz.

Wenn die Kräfte eines beliebigen Systemes, vorausgesetzt dafs sie, an einen Punct in ihren Richtungen übertragen, sich nicht gerade aufheben, ohne Änderung ihrer gegenseitigen Neigungen um ihre Angriffspuncte gedreht, und, was immer auf unzählige Arten möglich ist, in solche Stel-

lüngen gebracht werden, in welchen sie sich durch eine einzige ersetzen lassen; so trifft die Richtung der ersetzenden Kraft eine Ellipse und eine Hyperbel, welche den Centralpunct zum gemeinschaftlichen Mittelpuncte haben, und in zwei auf einander und auf der Central-Ebene senkrechten Ebenen so mit einander verbunden liegen, dafs die Scheitel der einen mit den Brennpuncten der anderen zusammenfallen.

In besonderen Fällen kann die Ellipse in einen Kreis, und mithin die Hyperbel in die Central-Axe desselben übergehen. Ferner kann die kleine Axe der Ellipse verschwinden, so dafs diese mit der grofsen Axe und die Hyperbel mit der Verlängerung derselben zusammenfällt. Es bleiben dann in dieser Axe nur zwei der Ellipse und Hyperbel zugleich angehörige Puncte übrig, von denen jede Resultante wenigstens einen treffen mufs. Verschwindet auch noch die grofse Axe der Ellipse, so fallen diese beiden Puncte in den Centralpunct, durch welchen dann die, in jeder beliebigen Stellung des Systemes vorhandene, Resultante gehen mufs.

Berlin, im September 1835.

3.

Über die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Dr. phil. zu Liegnitz.)

Die hypergeometrische Reihe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung ausmachen soll, hat schon längst die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen, theils weil sie eine sehr grofse Anzahl von Reihen-Entwickelungen bekannter Functionen in sich vereinigt, theils auch weil durch diese Reihe eine besondere Classe lineärer Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung integrirt werden kann. Zuerst hat Euler in den *Actis Academiae Petrop.* zwei allgemeine Umformungen dieser Reihe gefunden, von der Art, dafs die umgeformte Reihe wieder eine hypergeometrische Reihe derselben Gattung ist, und diese Umformungen sind alsdann von Pfaff, Jacobi und Gudermann auf verschiedene Weisen hergeleitet und bewiesen worden. Aufserdem hat Gau's in den *Comment. Soc. Gotting. Tom. II. a.* 1812, Untersuchungen über diese Reihe bekannt gemacht. Es ist bekannt, wie diese Abhandlung in der inhaltreichsten Kürze nicht nur viele Grundeigenschaften dieser hypergeometrischen Reihe, sondern auch die durchaus vollständigen Theorien zweier mit derselben in enger Verbindung stehender Transcendenten, und Anwendungen derselben auf Kettenbrüche und bestimmte Integrale enthält. Es ist aber diese Abhandlung nur der erste Theil einer gröfseren Abhandlung, welche jedoch nicht öffentlich erschienen ist, und namentlich fehlt noch die Vergleichung solcher hypergeometrischer Reihen unter einander, in welchen das letzte Element x verschieden ist. Dies wird daher ein Hauptgegenstand der gegenwärtigen Abhandlung sein; die zahlreichen Anwendungen der gefundenen Formeln werden alsdann vorzugsweise die elliptischen Transcendenten betreffen, von denen ein grofser Theil in der allgemeinen Reihe enthalten ist. Die Resultate der genannten Abhandlung von Gaufs, werden hier, wo es nöthig sein wird, als bekannt vorausgesetzt werden, so wie wir auch die von Gaufs eingeführten Bezeichnungen beibehalten wollen.

Abschnitt I.

Allgemeine Methode um Transcendenten unter einander zu vergleichen, welche als particuläre Integrale lineärer Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung angesehen werden können.

§. 1.

Es seien $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ zwei Functionen von x, von der Art, daſs $y=\varphi(x)$ und $y=\varphi_1(x)$ zwei particuläre Integrale folgender lineären Differenzialgleichung sind:

$$1.\quad \frac{d^2y}{dx^2}+p\frac{dy}{dx}+qy=0,$$

in welcher p und q Functionen von x bezeichnen. Eben so seien $\psi(z)$ und $\psi_1(z)$ zwei Functionen von z, von der Art, daſs $v=\psi(z)$ und $v=\psi_1(z)$ zwei particuläre Integrale der Gleichung

$$2.\quad \frac{d^2v}{dz^2}+P\frac{dv}{dz}+Qv=0$$

sind, in welcher P und Q Functionen von z bezeichnen. Das vollständige Integral der Gleichung (1.) ist sodann

$$3.\quad y=A\varphi(x)+B\varphi_1(x),$$

und eben so das vollständige Integral der Gleichung (2.)

$$4.\quad v=A'\psi(z)+B'\psi_1(z),$$

wo A, B, A' und B' beliebige Constanten sind. Nur dann, wenn die angenommenen Functionen von der Art sind, daſs $\varphi(x)=\text{const.}\,\varphi_1(x)$, oder daſs $\psi(z)=\text{const.}\,\psi_1(z)$, werden die Gleichungen (3.) und (4.) nicht mehr die vollständigen, sondern nur particuläre Integrale der Differenzialgleichungen (1.) und (2.) sein.

Um nun unter den vier Functionen φ, φ_1, ψ und ψ_1, welche wir als die mit einander zu vergleichenden Transcendenten betrachten, einfache Relationen zu finden, soll jetzt z als Function von x betrachtet und die Bedingung gesetzt werden, daſs

$$y=w.v$$

der Differenzialgleichung (1.) genüge, wo w eine noch zu bestimmende Function von x ist, y und v aber durch die Gleichungen (1.) und (2.) bestimmt sind. Wenn man nämlich z und w als Functionen von x wirklich so bestimmt hat, daſs $y=w.v$ der Differenzialgleichung (1.) genügt,

so ist nach Gleichung (3.) und (4.) sowohl $y=A\varphi(x)+B\varphi_1(x)$, als auch $y=A'w\psi(z)+B'w\psi_1(z)$, das vollständige Integral der Gleichung (1.). Die willkürlichen Constanten des vollständigen Integrales in der einen Form müssen sich aber immer so bestimmen lassen, daſs dieses dem vollständigen Integrale in der andern Form gleich werde; man hat also dann die Gleichung

$$5.\qquad A\varphi(x)+B\varphi_1(x) = A'w\psi(z)+B'w\psi_1(z),$$

in welcher entweder A und B beliebig, und A' und B' danach zu bestimmen sind, oder umgekehrt A' und B' beliebig, und A und B nach diesen zu bestimmen. In dieser Gleichung sind nun folgende vier einfachere enthalten

$$6.\qquad \begin{cases} \varphi(x) = a\,w\psi(z)+b\,w\psi_1(z), \\ \varphi_1(x) = a'w\psi(z)+b'w\psi_1(z), \\ w\psi(z) = a''\varphi(x)+b''\varphi_1(x), \\ w\psi_1(z) = a'''\varphi(x)+b'''\varphi_1(x). \end{cases}$$

Setzt man nämlich in der Gleichung (5.) $A=1$, $B=0$, wodurch $A'=a$ und $B'=b$ werde, so erhält man die erste der hier angegebenen Gleichungen; und eben so, indem man eine andere der Constanten A, B, A' und B', gleich 0 setzt, erhält man die anderen drei Gleichungen. Von dieser Form werden also die zu findenden Relationen der Functionen φ, φ_1, ψ und ψ_1 sein.

Von einer anderen Seite betrachtet: wenn man z und w als Functionen von x so bestimmen kann, daſs $y=w.v$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so wird man nun vier particuläre Integrale dieser einen Gleichung haben, nämlich $y=\varphi(x)$, $y=\varphi_1(x)$, $y=w\psi(z)$, und $y=w\psi_1(z)$, und aus den Gleichungen bei (6.) geht hervor, daſs zwischen je dreien derselben, welche durch $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$, bezeichnet werden mögen, stets eine Bedingungsgleichung von der Form

$$7.\qquad y_{,} = ay_{,,}+by_{,,,}$$

statt haben muſs, wo a und b Constanten sind, deren Werthe nach den particulären Integralen $y_{,}$, $y_{,,}$, $y_{,,,}$ bestimmt werden müssen. Diese Bedingungsgleichung unter drei particulären Integralen ist auch leicht aus der Form der Differenzialgleichung (1.) zu erkennen. Wenn man ferner die Functionen z und w auf mehrere Arten so bestimmen kann, daſs $y=w.v$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so wird man nicht nur vier particuläre Integrale der Gleichung (1.) haben, sondern eine gröſsere An-

zahl, und auch unter je dreien von diesen mufs nothwendig eine Bedingungsgleichung von der Form $y_{,}=ay_{,,}+by_{,,,}$ statt haben.

§. 2.

Es sollen nun die Quantitäten z und w als Functionen von x wirklich so bestimmt werden, dafs $y=w.v$ der Differenzialgleichung (1.) genüge. Indem man differenzïirt, und dx als constant betrachtet, erhält man:

$$y = w.v,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dw}{dx}v+w\frac{dv}{dz}.\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2w}{dx^2}v+2\frac{dw}{dx}.\frac{dv}{dz}.\frac{dz}{dx}+w\frac{dv}{dz}.\frac{d^2z}{dx^2}+w\frac{d^2v}{dz^2}.\frac{dz^2}{dx^2}.$$

Werden diese Werthe von y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ in der Gleichung (1.) substituirt, so erhält man

$$8.\quad w\frac{dz^2}{dx^2}.\frac{d^2v}{dz^2}+\left(2\frac{dw}{dx}.\frac{dz}{dx}+w\frac{d^2z}{dx^2}+pw\frac{dz}{dx}\right)\frac{dv}{dz}+\left(\frac{d^2w}{dx^2}+p\frac{dw}{dx}+qw\right)v=0.$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf v ebenfalls eine lineäre Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ist, mufs nun mit der Gleichung (2.) identisch sein. Multiplicirt man nun die Gleichung (2.) mit $w\frac{dz^2}{dx^2}$, so ist

$$w\frac{dz^2}{dx^2}.\frac{d^2v}{dz^2}+w\frac{dz^2}{dx^2}P\frac{dv}{dz}+w\frac{dz^2}{dx^2}Qv=0,$$

und diese wird mit Gleichung (8.) identisch gemacht, indem die Coefficienten von v und $\frac{dv}{dz}$ in beiden gleich gesetzt werden. Dies giebt folgende zwei Bedingungsgleichungen für z und w:

$$9.\qquad 2\frac{dw}{dx}.\frac{dz}{dx}+w\frac{d^2z}{dx^2}+pw\frac{dz}{dx}=Pw\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$10.\qquad \frac{d^2w}{dx^2}+p\frac{dw}{dx}+qw=w\frac{dz^2}{dx^2}Q,$$

und wenn diese beiden Gleichungen erfüllt sind, so ist $y=w.v$ ein richtiges Integral der Gleichung (1.).

Die erste dieser beiden Gleichungen läfst sich leicht integriren. Dividirt man dieselbe nämlich durch $w\frac{dz}{dx}$, so erhält man:

$$2\frac{dw}{w}+\frac{d^2z}{dz}+p\,dx-P\,dz=0:$$

eine Gleichung, in welcher die drei Variabeln x, z und w getrennt sind. Die Integration giebt daher

$$2lw+l\frac{dz}{dx}+\int p\,dx-\int P\,dz = lc,$$

oder wenn von den Logarithmen zu den Zahlen übergegangen wird:

$$11. \quad w^2 = c.e^{\int Pdz-\int pdx}.\frac{dx}{dz}.$$

Hätte man nun z als Function von x gefunden, so dürfte man nur den Werth desselben in dieser Gleichung substituiren, um sogleich auch die Quantität w zu haben, welche künftig der Multiplicator genannt werden soll. Um aber z als Function von x allein zu haben, mufs man aus den Gleichungen (9.) und (10.) w, $\frac{dw}{dx}$ und $\frac{d^2w}{dx^2}$ eliminiren. Diese Elimination, welche aufser einiger Weitläuftigkeit keine Schwierigkeiten hat, nach der gewöhnlichen Methode ausgeführt, giebt folgende Differenzialgleichung der dritten Ordnung:

$$12. \quad 2\frac{d^3z}{dz\,dx^2}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2-\left(2\frac{dP}{dz}+P^2-4Q\right)\frac{dz^2}{dx^2}+2\frac{dp}{dx}+p^2-4q=0.$$

Wenn also z als Function von x durch diese Gleichung (12.) bestimmt ist, und wenn sodann der Multiplicator w durch die Gleichung (11.) gefunden ist, so haben, wie gezeigt worden ist, unter den Functionen $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi(z)$ und $\psi_1(z)$ (den particulären Integralen der Gleichungen (1.) und (2.)) die Bedingungsgleichungen statt, welche bei (5.) und (6.) angegeben sind. Die einzige Schwierigkeit liegt also nur noch darin, mit Hilfe der Gleichung (12.) z als Function von x zu bestimmen, oder diese Gleichung zu integriren.

§. 3.

Wenn man nun aber überhaupt Transcendenten unter einander vergleicht, so sucht man nur algebraische Relationen derselben, oder man untersucht, wie man einer transcendenten Gleichung durch eine algebraische Gleichung genügen kann. Für den gegenwärtigen Fall also, wo die Transcendenten der Gleichung (5.)

$$A\varphi(x)+B\varphi_1(x) = A'w\psi(z)+B'w\psi_1(z)$$

mit einander verglichen werden sollen, mufs man nach der Natur der vorliegenden Aufgabe untersuchen, durch welche algebraische Gleichung zwischen z und x diese transcendente Gleichung erfüllt wird. Es handelt sich also darum, algebraische particuläre Integrale der Differenzialgleichung (12.) zu finden, und jeder algebraischen Gleichung, welche aus

derselben hergeleitet werden kann, wird alsdann eine transcendente Gleichung von der Form der Gleichung (5.) entsprechen.

Die Aufgabe, alle particulären algebraischen Integrale einer gegebenen Differenzialgleichung zu finden, gehört unstreitig zu den schwierigsten, welche in neuerer Zeit aufgestellt worden sind; und besonders für die Differenzialgleichungen höherer Ordnungen, wie es die Gleichung (12.) ist, scheint die Lösung dieser Aufgabe im allgemeinen bis jetzt noch unausführbar zu sein. In dem Falle aber, für welchen wir diese allgemeine Methode gefunden haben, und auf welchen sie in dem Folgenden angewendet werden soll, wird sich zeigen, dafs bei einer einfachen Voraussetzung alle algebraischen Integrale dieser Gleichung sich auf eine sehr leichte Weise ergeben.

Das vollständige Integral der Gleichung (12.), welches durch die Transcendenten $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, $\psi(z)$, $\psi_1(z)$ ausgedrückt werden kann, hat zwar für den gegenwärtigen Zweck keinen besonderen Nutzen; da es jedoch sich aus dem Bisherigen sehr leicht ergiebt, und in anderer Beziehung von Wichtigkeit ist, so mag es hier einen Platz finden.

Die Gleichung (5.)

$$A\Phi(x)+B\Phi_1(x) = w(A'\psi(z)+B'\psi_1(z))$$

ist nämlich in der That schon ein vollständiges zweites Integral der Gleichung (12.), welches zwei beliebige Constanten, und nur noch den ersten Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, in der Quantität w, enthält. Wird nämlich diese Gleichung zum Quadrate erhoben, und für w^2 sein Werth aus der Gleichung (11.) gesetzt, so geht dieselbe in folgende über:

$$\frac{c.e^{-\int p dx}.dx}{(A\varphi(x)+B\varphi_1(x))^2} = \frac{e^{-\int P dz}.dz}{(A'\psi(z)+B'\psi_1(z))^2}.$$

Durch nochmalige Integration dieser Gleichung, in welcher die Veränderlichen z und x getrennt sind, würde man das vollständige letzte Integral der Differenzialgleichung (12.) erhalten. Man erhält dieses Integral aber leichter, und in der einfachsten Form, auf folgende Weise. Wenn C und D zwei beliebige andere Constanten bezeichnen, als A und B in der Gleichung (5.), so hat man ebenfalls:

$$C\Phi(x)+D\Phi_1(x) = w(C'\psi(z)+D'\psi_1(z)),$$

und wenn man diese und die Gleichung (5.) durch einander dividirt, wodurch die Quantität w und das in derselben enthaltene $\frac{dz}{dx}$ eliminirt wird,

so erhält man

$$\frac{A\varphi(x)+B\varphi_1(x)}{C\varphi(x)+D\varphi_1(x)}=\frac{A'\psi(z)+B'\psi_1(z)}{C'\psi(z)+D'\psi_1(z)},$$

als vollständiges Integral der Gleichung (12.), welches auch unter folgende bequemere Form gebracht werden kann:

$$13.\qquad A\Phi(x)\psi(z)+B\Phi(x)\psi_1(z)+C\Phi_1(x)\psi(z)+D\Phi_1(x)\psi_1(z)=0.$$

Anmerkung. In einer Abhandlung zu dem Osterprogramm 1834 des Gymnasiums zu Liegnitz: *De generali quadam aequatione differentiali tertii ordinis*, habe ich die in diesem Abschnitte enthaltene Methode von einer etwas anderen Seite dargestellt. Ich gehe daselbst von der Differentialgleichung

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^2}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2-Z\frac{dz^2}{dx^2}+X=0$$

aus, in welcher X und Z beliebige Functionen, respective von x und z sind, und ich zeige, wie die vollständige Integration dieser Gleichung auf die Integration zweier lineärer Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung, von der Form der Gleichungen (1.) und (2.), reducirt wird.

Abschnitt II.

Anwendung der allgemeinen Methode auf die hypergeometrischen Reihen. Allgemeine Umformungen derselben; welche Statt haben, indem die drei Elemente α, β und γ beliebig sind.

§. 4.

Zu den Transcendenten, welche als particuläre Integrale lineärer Differenzialgleichungen der zweiten Ordnung angesehen werden können, gehört auch die bekannte hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

Dieselbe ist von den vier Elementen α, β, γ und x abhängig, und wird als Function derselben passend durch $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ bezeichnet, so dafs

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

Diese Reihe, oder die Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche wir durch diese Reihe definiren, soll nun den Gegenstand der folgenden Untersuchungen ausmachen, und zwar soll zunächst diese Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ nicht mit Transcendenten anderer Gattungen verglichen werden, sondern es sollen

einfache Gleichungen gesucht werden, welche unter verschiedenen Functionen derselben Gattung statt haben.

Es werde nun für die allgemeine Gleichung (1.) des vorigen Abschnittes folgende specielle Gleichung angenommen:

$$1.\quad \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha.\beta.y}{x(1-x)}=0,$$

welcher $y=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ als particuläres Integral genügt. Da ferner nur Relationen der hypergeometrischen Reihen unter einander gesucht werden, so muſs für die Gleichung (2.) des vorigen Abschnittes eine Gleichung von derselben Form angenommen werden. Es sei also

$$2.\quad \frac{d^2v}{dz^2}+\frac{\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)z}{z(1-z)}\cdot\frac{dv}{dz}-\frac{\alpha'.\beta'.v}{z(1-z)}=0,$$

welcher das particuläre Integral $v=F(\alpha',\beta',\gamma',z)$ genügt. Diese beiden Gleichungen, mit den entsprechenden Gleichungen (1.) und (2.) des vorigen Abschnittes verglichen, geben

$$p=\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)},\qquad q=\frac{-\alpha.\beta}{x(1-x)},$$
$$P=\frac{\gamma'-(\alpha'+\beta'+1)z}{z(1-z)},\qquad Q=\frac{-\alpha'.\beta'}{z(1-z)}.$$

Hieraus folgt zunächst

$$e^{\int p\,dx}=x^{\gamma}(1-x)^{-\gamma+\alpha+\beta+1},\qquad e^{\int P\,dz}=z^{\gamma'}(1-z)^{-\gamma'+\alpha'+\beta'+1}$$

Wird dies in der Gleichung (11.) des vorigen Abschnittes substituirt, so erhält man für den Ausdruck des Multiplicators w:

$$3.\quad w^2=c.x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}z^{\gamma'}(1-z)^{-\gamma'+\alpha'+\beta'+1}\frac{dx}{dz}.$$

Ferner ist nach den angenommenen Werthen von p, P, q, Q:

$$2\frac{dp}{dx}+p^2-4q=\frac{((\alpha-\beta)^2-1)x^2+(4\alpha\beta-2\gamma(\alpha+\beta-1))x+\gamma(\gamma-2)}{x^2(1-x)^2},$$
$$2\frac{dP}{dz}+P^2-4Q=\frac{((\alpha'-\beta')^2-1)z^2+(4\alpha'\beta'-2\gamma'(\alpha'+\beta'-1))z+\gamma'(\gamma'-2)}{z^2(1-z)^2},$$

und wenn diese Ausdrücke in der Gleichung (12.) des vorigen Abschnittes substituirt werden, so erhält man daraus die Gleichung

$$4.\quad 2\frac{d^3z}{dz\,dx^3}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2-\frac{A'z^2+B'z+C'}{z^2(1-z)^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(1-x)^2}=0,$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$A=(\alpha-\beta)^2-1,\qquad A'=(\alpha'-\beta')^2-1,$$
$$B=4\alpha\beta-2\gamma(\alpha+\beta-1),\qquad B'=4\alpha'\beta'-2\gamma'(\alpha'+\beta'-1),$$
$$C=\gamma(\gamma-2),\qquad C'=\gamma'(\gamma'-2).$$

Die beiden Gleichungen (3.) und (4.) drücken nun, wie oben allgemein gezeigt worden ist, die Bedingungen aus, welche w und z erfüllen müssen, damit $y = w.v$, oder in dem gegenwärtigen Falle, $y = wF(\alpha', \beta', \gamma', z)$ der Differenzialgleichung (1.) dieses Abschnittes genüge.

§. 5.

Es sind nun die algebraischen particulären Integrale dieser Gleichung (4.) zu suchen, welche sodann für die Gleichung (1.) Integrale von der Form $wF(\alpha', \beta', \gamma', z)$ geben werden. Um die Aufsuchung der algebraischen particulären Integrale der Gleichung (4.) zu erleichtern, setze ich voraus, es soll z Function von x allein sein, also von α, β, γ, α', β', γ' ganz unabhängig; ferner sollen die Gröfsen α', β', γ', Functionen von α, β, γ sein, und zwar von folgender Form:

$$5.\quad \begin{cases} \alpha' = \lambda\alpha + \lambda'\beta + \lambda''\gamma + \lambda''', \\ \beta' = \mu\alpha + \mu'\beta + \mu''\gamma + \mu''', \\ \gamma' = \nu\alpha + \nu'\beta + \nu''\gamma + \nu''', \end{cases}$$

wo λ, λ', μ, ν, etc. constante Zahlencoefficienten sind. Durch diese beiden Annahmen wird scheinbar etwas von der Allgemeinheit der Untersuchung aufgegeben; denn es könnte vielleicht der Fall sein, dafs die Gleichung (1.) noch andere Integrale von der Form $y = wF(\alpha', \beta', \gamma', z)$ hätte, in welchen z nicht von α, β, γ unabhängig wäre, und auch α', β', γ', als Functionen von α, β, γ nicht die vorausgesetzte Form hätten. Es sollen überdies in diesem Abschnitte die drei Quantitäten α, β und γ als ganz beliebig und unabhängig von einander angesehen werden. Wenn man nämlich Bedingungs-Gleichungen unter denselben zuläfst, so dafs sie nicht mehr alle drei beliebig sind, so handelt es sich nicht mehr um die allgemeine Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, sondern um speciellere Reihen dieser Art, welche wir in den folgenden Abschnitten betrachten werden.

Wenn man nun nach den angenommenen Voraussetzungen diese Werthe der Quantitäten α', β' und γ' in der Gleichung (4.) substituirt, so erhält man eine Gleichung, welche für jeden beliebigen Werth der Quantitäten α, β und γ gelten mufs. Es müssen darum alle einzelnen Theile dieser Gleichung, welche α^2, β^2, γ^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, α, β, γ zu Factoren haben für sich verschwinden, so dafs diese Gleichung in 10 einzelne Gleichungen zerfällt, die alle unter einander identisch sein, oder denselben Werth des z als Function von x gewähren müssen. Die Quantität $Ax^2 + Bx + C$, nach dem gegenwärtigen Zwecke entwickelt, wird

$$Ax^2+Bx+C$$
$$= x^2\alpha^2+x^2\beta^2+\gamma^2-(2x^2-4x)\alpha\beta-2x\alpha\gamma-2(1-x)\gamma-x^2;$$

ferner wird die Entwickelung von $A'z^2+B'z+C'$, nachdem die Werthe von α', β', γ' substituirt sind, folgende Form haben:

$$A'z^2+B'z+C'=h\alpha^2+k\beta^2+l.\gamma^2+m\alpha\beta+n\beta\gamma+p\alpha\gamma+q\alpha+r\beta+s\gamma+t,$$

wo die Quantitäten h, k, l, m, etc. sämmtlich Trinomien von der Form az^2+bz+c sind, deren nähere Bestimmung jetzt unnöthig sein würde. Es soll nun zunächst die allgemeinste Form gefunden werden, welche z als Function von x haben kann. Darum würde es auch unnöthig sein, alle zehn Gleichungen aufzustellen, in welche die Gleichung (4.) zerfällt; es reicht vielmehr hin, nur diejenigen drei zu betrachten, welche man erhält, indem die Theile, welche γ, β^2 und γ^2 zu Factoren haben, für sich verschwinden müssen. Wenn für die Quantitäten s, k und l, Trinomien von der Form az^2+bz+c gesetzt werden, erhält man so die drei Gleichungen:

$$6.\quad \frac{-2(1-x)}{x^4(1-x)^2}=\frac{az^2+bz+c}{z^2(1-z)^2}.\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$7.\quad \frac{x^2}{x^2(1-x)^2}=\frac{a'z^2+b'z+c'}{z^2(1-z)^2}.\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$8.\quad \frac{1}{x^2(1-x)^2}=\frac{a''z^2+b''z+c''}{z^2(1-z)^2}.\frac{dz^2}{dx^2}.$$

Die beiden Gleichungen (7.) und (8.) durch einander dividirt, geben nun

$$9.\quad x^2=\frac{a'z^2+b'z+c'}{a''z^2+b''z+c''},$$

Die Gleichungen (6.) und (8.) durch einander dividirt, geben

$$10\quad 2x-2=\frac{az^2+bz+c}{a''z^2+b''z+c''}.$$

Aus dieser Gleichung (10.) ersieht man, dafs x eine rationale Function von z sein mufs; deshalb mufs sich aus beiden Theilen der Gleichung (9.) die Quadratwurzel rational ausziehen lassen; also mufs x die Form haben:

$$x=\frac{az+b}{\rho z+d},$$

und umgekehrt mufs darum auch z, als Function von x, die Form haben:

$$11.\quad z=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

§. 6.

Da die so allgemeinste Form gefunden worden ist, welche die Function z hat, so ist es leicht, alle particulären algebraischen Integrale der

Gleichung (4.), und somit auch alle Integrale von der Form $y = wF(\alpha', \beta', \gamma', z)$ zu finden, welche der Gleichung (1.) genügen. Setzt man nämlich in der Gleichung (4.)

$$z = \frac{ax+b}{cx+d},$$

so findet man zunächst, dafs für diesen Werth des z,

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^3} - 3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 = 0,$$

und deshalb geht die Gleichung (4.) in folgende über:

$$12.\quad \frac{Ax^2+Bx+C}{x^2(1-x)^2} = (ad-bc)^2\frac{A'(ax+b)^2+B'(ax+b)(cx+d)+C'(cx+d)^2}{(ax+b)^2(cx+d)^2((c-a)x+d-b)^2}.$$

Zähler und Nenner der beiden Theile rechts und links vom Gleichheitszeichen können keine gemeinschaftlichen Factoren haben, weil α, β und γ beliebige Gröfsen und A, B, C, A', B', C' Functionen derselben sind; deshalb können die beiden Nenner, und eben so die beiden Zähler sich nur durch einen constanten Factor m unterscheiden. Man hat also folgende zwei Gleichungen:

$$13.\quad mx^2(1-x)^2 = (ax+b)^2(cx+d)^2((c-a)x+d-b)^2,$$

$$14.\quad m(Ax^2+Bx+C)$$
$$= (ad-bc)^2(A'(ax+b)^2+B'(ax+b)(cx+d)+C'(cx+d)^2).$$

Die Gleichung (13.) giebt nun folgende sechs verschiedene Bestimmungen der Gröfsen a, b, c, d und m:

$$15.\quad \begin{cases} 1) & c=0, & b=0, & a-d=0, & m=a^6,\\ 2) & c=0, & d-b=0, & a+b=0, & m=a^6,\\ 3) & a=0, & d=0, & c-b=0, & m=b^6,\\ 4) & a=0, & d-b=0, & c+d=0 & m=b^6.\\ 5) & c-a=0, & b=0, & c+d=0, & m=a^6,\\ 6) & c-a=0, & d=0, & a+b=0, & m=b^6,\end{cases}$$

und wenn diese Werthe in der Gleichung (11.) substituirt werden, so hat man folgende Werthe des z:

$$16.\quad \begin{cases} 1)\ z=x, & 2)\ z=1-x, & 3)\ z=\frac{1}{x},\\ 4)\ z=\frac{1}{1-x}, & 5)\ z=\frac{x}{x-1}, & 6)\ z=\frac{x-1}{x}.\end{cases}$$

Nachdem nun diese Werthe des z aus den Gleichungen (11.) und (13.) gefunden sind, müssen zunächst aus der Gleichung (14.) die Werthe der Gröfsen α', β' und γ' durch α, β und γ bestimmt werden, welche einem jeden dieser 6 Werthe des z zukommen.

Nimmt man den Werth $z=x$, für welchen $c=0$, $b=0$, $a-d=0$, $m=a^6$, und substituirt dies in der Gleichung (14.), so geht dieselbe über in:

$$Ax^2+Bx+C=A'x^2+B'x+C',$$

und weil diese Gleichung für jeden beliebigen Werth des x bestehen mufs, so hat man:

$$A=A',\qquad B=B',\qquad C=C',$$

und wenn die bei (4.) angegebenen Werthe dieser Quantitäten genommen werden:

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha'-\beta')^2,$$

$$4\alpha\beta-2\gamma(\alpha+\beta-1)=4\alpha'\beta'-2\gamma'(\alpha'+\beta'-1),\quad \gamma(\gamma-2)=\gamma'(\gamma'-2),$$

welchen Gleichungen auf die vier verschiedene Arten genügt werden kann:

1) $\alpha'=\alpha,\qquad \beta'=\beta,\qquad \gamma'=\gamma,$
2) $\alpha'=\gamma-\alpha,\qquad \beta'=\gamma-\beta,\qquad \gamma'=\gamma,$
3) $\alpha'=\alpha-\gamma+1,\qquad \beta'=\beta-\gamma+1,\qquad \gamma'=2-\gamma,$
4) $\alpha'=1-\alpha,\qquad \beta'=1-\beta,\qquad \gamma'=2-\gamma.$

Indem man diese Werthe in der Gleichung (3.) substituirt, in welcher $z=x$ genommen werden mufs, findet man folgende vier Werthe des Multiplicators w, welche diesen vier Werthen von α', β', γ' entsprechen:

1) $w=c$, 2) $w=c(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$, 3) $w=cx^{1-\gamma}$,
4) $w=cx^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$.

Man hat also endlich folgende vier particuläre Integrale der Gleichung (1.) von der Form $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$, welche dem Werthe $z=x$ angehören:

1) $y=F(\alpha,\beta,\gamma,x)$,
2) $y=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)$,
3) $y=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$,
4) $y=x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)$.

Auf dieselbe Weise kann man nun für die übrigen fünf Werthe des z sämmtliche Integrale der Gleichung (1.) finden, welche die Form $wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ haben. Man wird so, ebenfalls wie in diesem Falle, für jeden einzelnen Werth des z vier verschiedene Bestimmungen der Gröfsen α', β', γ' finden, und also auch vier verschiedene Integrale von der Form $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$, so dafs deren Gesammtzahl 24 beträgt.

§. 7.

Man hat jedoch nicht nöthig, diese 24 Integrale auf diese etwas weitläuftige Weise zu suchen, indem für die Auffindung derselben einige sehr einfache Bemerkungen hinreichen, welche, da sie auch um des Folgenden willen von Wichtigkeit sind, hier mitgetheilt werden sollen.

1. Die Gleichung (4.) bleibt unverändert, wenn man in derselben setzt: $\gamma'-\alpha'$ statt α', $\gamma'-\beta'$ statt β'. Dann verwandelt sich aber, nach Gleichung (3.), der Multiplicator w in $(1-z)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}w$. Also wenn $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so mufs derselben auch das Integral $y=(1-z)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}wF(\gamma'-\alpha',\gamma'-\beta',\gamma',z)$ genügen.

2. Die Gleichung (4.) bleibt unverändert, wenn man in derselben setzt: $2-\gamma'$ statt γ', $\alpha'-\gamma'+1$ statt α', $\beta'-\gamma'+1$ statt β'. Dann verwandelt sich aber, nach Gleichung (3.), w in $z^{1-\gamma'}w$. Also wenn $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so genügt derselben auch $y=z^{1-\gamma'}wF(\alpha'-\gamma'+1,\beta'-\gamma'+1,2-\gamma',z)$.

3. Die Gleichung (4.) bleibt unverändert, wenn man in derselben setzt: $2-\gamma'$ statt γ', $1-\alpha'$ statt α', $1-\beta'$ stat. β'. Dann verwandelt sich aber, nach Gleichung (3.), w in $z^{1-\gamma'}(1-z)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}w$. Also wenn das Integral $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so mufs derselben auch $y=z^{1-\gamma'}(1-z)^{\gamma'-\alpha'-\beta'}wF(\gamma-\alpha',1-\beta',2-\gamma',z)$ genügen.

Durch diese drei Sätze, deren dritter eigentlich schon in den beiden ersten enthalten ist, wird man aus einem Integrale allemal drei andere herleiten können, welche denselben Werth des letzten Elementes z haben. Um noch alle übrigen Integrale für die anderen Werthe des z herleiten zu können, reichen folgende zwei Sätze hin.

4. Die Gleichung (4.) bleibt unverändert, wenn man in derselben setzt: $1-z$ statt z und $\alpha'+\beta'-\gamma'+1$ statt γ'. Aus der Gleichung (3.) ersieht man ferner, dafs auch w dann unverändert bleibt. Also wenn $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so genügt derselben auch das Integral $y=wF(\alpha',\beta',\alpha'+\beta'-\gamma'+1,1-z)$.

5. Die Gleichung (4.) bleibt unverändert, wenn man in derselben setzt: $\frac{z}{z-1}$ statt z und $\gamma'-\beta'$ statt β'. Dann verwandelt sich aber, nach Gleichung (3.), w in $(1-z)^{-\alpha'}w$. Also wenn $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ der Differenzialgleichung (1.) genügt, so genügt derselben auch

$$y=(1-z)^{-\alpha'}wF\left(\alpha',\gamma'-\beta',\gamma',\frac{z}{z-1}\right).$$

§. 8.

Vermittelst der fünf Sätze des vorigen Paragraphen kann man nun aus dem einzigen bekannten Integrale der Gleichung (1.), nämlich $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, folgende 24 herleiten, welches, wie wir oben gesehen haben, die Gesammtzahl der Integrale ist, die unter den gemachten Voraussetzungen Statt haben können:

1) $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$,
2) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$,
3) $x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x)$,
4) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x)$,
5) $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$,
6) $x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$,
7) $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$,
8) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha, 1-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, 1-x)$,
9) $x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right)$,
10) $x^{-\beta}F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right)$,
11) $x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{x}\right)$,
12) $x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{x}\right)$,
13) $(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-x}\right)$,
14) $(1-x)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-x}\right)$,
15) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, \alpha-\beta+1, \frac{1}{1-x}\right)$,
16) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, \beta-\alpha+1, \frac{1}{1-x}\right)$,
17) $(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
18) $(1-x)^{-\beta}F\left(\beta, \gamma-\alpha, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
19) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}F\left(\alpha-\gamma+1, 1-\beta, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
20) $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F\left(\beta-\gamma+1, 1-\alpha, 2-\gamma, \frac{x}{x-1}\right)$,
21) $x^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha+\beta-\gamma+1, \frac{x-1}{x}\right)$,

$$22)\quad x^{-\beta}F\left(\beta,\,\beta-\gamma+1,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,\frac{x-1}{x}\right),$$

$$23)\quad x^{\alpha-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\alpha,\,\gamma-\alpha,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,\frac{x-1}{x}\right),$$

$$24)\quad x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F\left(1-\beta,\,\gamma-\beta,\,\gamma-\alpha-\beta+1,\,\frac{x-1}{x}\right).$$

Aus dem bekannten ersten Integrale folgen nämlich nach den drei ersten Sätzen des vorigen Paragraphen die Integrale 2, 3 und 4; aus 1, 2, 3, 4 folgen nach dem vierten Lehrsatze 5, 6, 7 und 8; aus diesen sodann nach dem fünften Satze 21, 22, 23 und 24; aus diesen nach dem vierten Lehrsatze 9, 10, 11 und 12; aus diesen wieder nach dem fünften Lehrsatze 13, 14, 15 und 16, und aus diesen endlich leitet man nach dem vierten Satze die Integrale 17, 18, 19 und 20 ab.

§. 9.

Da nun alle particulären Integrale der Gleichung (1.), welche die vorausgesetzte Form haben, gefunden sind, so sind nun die Gleichungen zu bilden, welche unter denselben statt haben müssen. Wenn nämlich $y_{,}$, $y_{,,}$ und $y_{,,,}$ drei beliebige dieser particulären Integrale bezeichnen, so findet unter denselben eine Gleichung von der Form

$$y_{,} = a y_{,,} + b y_{,,,}$$

statt, wie im ersten Abschnitte gezeigt worden ist. Zunächst aber mag bemerkt werden, daſs es unter den 24 Integralen auch solche geben kann, für welche eine der Constanten a oder b gleich 0 wird, und welche sich also nur durch einen constanten Factor unterscheiden. In dieser Hinsicht soll folgender Satz bewiesen werden

> Wenn man mehrere Integrale der Gleichung (1.) hat, welche sich nach ganzen aufsteigenden Potenzen von x entwickeln lassen, so können sich dieselben nur durch constante Factoren von einander unterscheiden. *)

---

*) Dieser Satz muſs jedoch mit einiger Vorsicht angewendet werden, damit man nicht zu voreilig schlieſse, daſs ein Integral sich nach ganzen aufsteigenden Potenzen von x entwickeln lasse. So z. B. scheint das Integral

$$F(\alpha,\,\beta,\,\alpha+\beta-\gamma+1,\,1-x)$$
$$=1+\frac{\alpha.\beta.(1-x)}{1(\alpha+\beta-\gamma+1)}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)(1-x)^2}{1.2.(\alpha+\beta-\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)}+\dots,$$

wenn die Potenzen von $1-x$ entwickelt werden, allerdings die Form anzunehmen.

Setzt man nämlich für y die Form $y = A + Bx + Cx^2 + \dots$, so kann man aus der Gleichung (1.) nur das eine Integral $y = AF(\alpha, \beta, \gamma, x)$ erhalten: alle Integrale also, welche die Form $A + Bx + Cx^2 + \dots$ annehmen können, oder sich nach ganzen steigenden Potenzen von x entwickeln lassen, werden sich von dem Integrale $A.F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, und deshalb auch unter einander selbst, nur durch die constanten Factoren unterscheiden.

Solche Integrale nun, welche sich nach ganzen steigenden Potenzen von x entwickeln lassen, sind unter andern die Integrale 1, 2 und 17 des §. 8.:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x), \qquad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) \quad \text{und}$$
$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right);$$

man hat also nach dem so eben bewiesenen Satze folgende zwei Gleichungen:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = A(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x),$$
$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = A'(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Setzt man $x = 0$, so werden die Werthe der beiden constanten Factoren bestimmt, nämlich $A = 1$, $A' = 1$. Man hat also die beiden einfachen Gleichungen:

$$17. \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x).$$
$$18. \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right).$$

Dies sind jene beiden Umformungen dieser hypergeometrischen Reihe, welche zuerst von Euler gefunden, und nachher auf verschiedene Arten hergeleitet worden sind. Die einfachste Art, die Richtigkeit derselben *a posteriori* zu beweisen, besteht darin, dafs man die Theile rechts vom Gleichheitszeichen wirklich nach Potenzen von x entwickelt, wodurch diese Gleichungen identisch werden.

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x) = A + Bx + Cx^2 + \dots:$$

wenn man jedoch die Werthe der Coefficienten A, B, C, etc. näher untersucht, so findet man leicht, dafs im allgemeinen der $k$te Coefficient durch die unendliche Reihe $F(\alpha+k, \beta+k, \alpha+\beta-\gamma+k+1, 1)$ ausgedrückt wird. Diese Reihe hat aber nur dann einen bestimmten Werth, wenn sie wirklich convergirt, welches (vergl. Gaufs Abhdlg. pag. 19) nur dann der Fall ist, wenn $1-\gamma-k$ positiv. Die Coefficienten dieser Entwickelung von $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$ werden deshalb, von einem bestimmten an alle divergirende Reihen sein; woraus man schliefsen mufs, dafs dieses Integral eine Entwickelung von dieser Form nicht annehmen kann.

Es kann hier bemerkt werden, dafs die Gleichung (17.) sich auf sehr einfache Weise aus der Gleichung (18.) ableiten läfst. Vertauscht man nämlich in dieser α mit β, so erhält man

$$F(\beta,\alpha,\gamma,x) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right),$$

und weil $F(\beta,\alpha,\gamma,x) = F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, so folgt aus dieser und der Gleichung (18.):

$$(1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right) = (1-x)^{-\beta} F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right).$$

Setzt man hierin $\frac{x}{x-1}$ statt x, und $\gamma-\beta$ statt β, so erhält man

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x);$$

welches die Gleichung (17.) ist.

§. 10.

Vermittelst der beiden Gleichungen (17.) und (18.) findet man nun, dafs von den 24 Integralen des §. 8. immer je vier einander gleich sind, nämlich 1, 2, 17 und 18; 3, 4, 19 und 20; 5, 6, 21 und 22; 7, 8, 23 und 24; 9, 12, 13 und 15; 10, 11, 14 und 16. Nimmt man daher von jeder dieser sechs Classen ein beliebiges Integral, so hat man nur sechs von einander verschiedene Gleichungen, aus welchen andere von der Form $y_{,} = ay_{,,}+by_{,,,}$ gebildet werden sollen. Als diese mögen angenommen werden die Integrale 1, 3, 5, 7, 13 und 14. Ich bemerke ferner, dafs die Integrale 5 und 7 mit den Integralen 13 und 14 nicht zu Gleichungen verbunden werden können, weil die einen allemal divergirende Reihen sind, für die Werthe des x, für welche die anderen convergiren, so lange wenigstens x einen realen Werth hat. Es sind also nur noch aus je dreien der Integrale 1, 3, 5 und 7, und aus je dreien der Integrale 1, 3, 13 und 14 die Gleichungen zu formiren. Man sieht aber leicht ein, dafs einer jeden Gleichung unter drei Reihen F, in welcher die unveränderte Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ nicht vorkommt, augenblicklich eine solche Form gegeben werden kann, dafs diese unveränderte Function darin vorkommt, so dafs alle Gleichungen zu dreien Reihen F, in welchen diese unveränderte Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, oder das Integral 1, nicht vorkommt, schon in denen enthalten sein müssen, in welchen dieselbe vorkommt. Es bleiben daher nur noch diejenigen 6 ursprüngliche Gleichungen zu bilden, welche unter den Integralen 1, 3 und 5; 1, 3 und 7; 1, 5 und 7; 1, 3 und 13; 1, 3 und 14, Statt haben.

Verbindet man zunächst die drei Integrale 1, 3 und 5 zu einer Gleichung von der Form $y_, = ay_{,,} + by_{,,,}$, so erhält man:

$$19. \quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)$$
$$= Ax^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)+BF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x).$$

Um nun die Constanten dieser Gleichung zu bestimmen, ist es nöthig, den wirklichen Werth der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für zwei bestimmte Werthe des letzten Elementes x zu kennen. Nun ist aber für $x=0$ die Summe der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,0)=1$. Ein anderer Werth des x, für welchen man die Summe dieser Reihe ebenfalls durch bekannte Functionen ausdrücken kann, ist der Werth $x=1$. Die Summe der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ läfst sich nämlich durch die transcendente Function Π ausdrücken, welche Gaufs unter dieser Bezeichnung in der erwähnten Abhandlung betrachtet hat. Dieselbe Function ist bekannter unter dem Namen der Function Gamma und dem Zeichen Γ, unter welchem sie von Legendre in den *Exercices de calcul intégral* behandelt worden ist. Gaufs hat pag. 28 der Abhandlung gezeigt, dafs

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}.$$

Um nun durch die Fälle $x=0$ und $x=1$ die Constanten der Gleichung (19.) zu bestimmen, setze ich voraus, es soll $1-\gamma$ positiv sein, damit für $x=0$ auch $x^{1-\gamma}=0$ werde und $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1)$ eine convergirende Reihe sei. Eben so setze ich voraus, es soll $\gamma-\alpha-\beta$ positiv sein, damit $F(\alpha,\beta,\gamma,1)$ und $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,1)$ convergirende Reihen seien. Dieses vorausgesetzt, erhält man durch $x=0$:

$$1 = BF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1),$$

und durch $x=1$:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = AF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,1)+B:$$

also ist

$$B=\frac{1}{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1)},$$
$$A=\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,1)\,F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1)-1}{F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1)\,F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,1)}.$$

Drückt man nun diese Reihen F, deren letztes Element die Einheit ist, durch die Function Π aus, so erhält man nach den gehörigen Reductionen folgende Werthe der beiden Constanten A und B in der Gleichung (19):

$$20. \quad A=\frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\,\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}, \qquad B=\frac{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}$$

Es sind nun zwar diese Constanten unter der Voraussetzung bestimmt worden, dafs $1-\gamma$ und $\gamma-\alpha-\beta$ positiv seien, allein man kann sich überzeugen dafs dieselben Bestimmungen ebenfalls für alle anderen Fälle passen; denn hätte man zur Bestimmung dieser Constanten nicht grade die beiden Werthe $x=0$ und $x=1$ genommen, sondern zwei beliebige echte Brüche, so würden die genannten Bedingungen ganz überflüssig gewesen sein, und es ist klar, dafs man auch keine anderen Werthe dieser Constanten hätte finden können. Da aber die Allgemeingültigkeit der Formel (19.) mit den Werthen der Constanten, welche bei (20.) angegeben sind, von Wichtigkeit ist, so mag der Beweis noch direct geführt werden. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

Wenn erstens in Formel (19.) $1-\gamma$ negativ und $\gamma-\alpha-\beta$ positiv ist, so verwandle man vor der Bestimmung der Constanten die dritte Function F dieser Gleichung nach Formel (17.), wodurch man erhält:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = Ax^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$
$$+Bx^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x).$$

Dividirt man nun durch $x^{1-\gamma}$, und setzt sodann $x=0$ und $x=1$, so erhält man:

$$0 = A+BF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1),$$
$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = AF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,1)+B,$$

und hieraus, indem man die Reihen F durch die Function Π ausdrückt, ganz dieselben Werthe der Constanten, welche bei (20.) gefunden worden sind.

Wenn zweitens $1-\gamma$ positiv und $\gamma-\alpha-\beta$ negativ ist, so verwandle man die beiden ersten Reihen F der Gleichung (19.) nach Formel (17.), wodurch

$$(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)$$
$$=Ax^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)+BF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x).$$

Man dividire nun durch $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ und setze $x=0$ und $x=1$, so erhält man die beiden Gleichungen

$$F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,1) = AF(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,1).$$
$$1 = BF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1),$$

welche ganz dieselben Werthe der Constanten A und B geben.

Wenn endlich drittens $1-\gamma$ negativ und $\gamma-\alpha-\beta$ negativ, so verwandle man alle drei Reihen F der Gleichung (19.) nach Formel (17.) wodurch man erhält:

$$\begin{aligned}&(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ x)\\ &= Ax^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)\\ &+ Bx^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x).\end{aligned}$$

Dividirt man nun durch $x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}$ und setzt $x=0$ und $x=1$, so ist

$$0 = A+BF(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1),$$

$$F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma,\ 1) = AF(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ 1).$$

Auch aus diesen Gleichungen erhält man, nachdem die Reihen F durch die Function Π ausgedrückt sind, keine anderen Werthe der Constanten A und B als die obigen, so dafs dieselben also richtig sind, wenn die Quantitäten $1-\gamma$ und $\gamma-\alpha-\beta$ beliebig positiv oder negativ sind.

§. 11.

Zur besseren Übersicht wollen wir nun die sechs Gleichungen, welche aus den Integralen 1, 3 und 5; 1, 3 und 7; 1, 5 und 7; 1, 3 und 13; 1, 3 und 14; 1, 13 und 14 gebildet werden können, mit den zugehörigen Werthen ihrer Constanten hier zusammenstellen, wobei die unveränderte Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ einfach durch F bezeichnet werden soll.

21. $$\begin{cases} F = Ax^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)+BF(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x),\\ A = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},\qquad B = \dfrac{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)},\end{cases}$$

22. $$\begin{cases} F = A_1x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)\\ \quad +B_1(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),\\ A_1 = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha)\Pi(-\beta)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},\qquad B_1 = \dfrac{\Pi(-\alpha)\Pi(-\beta)}{\Pi(\gamma-\alpha-\beta)\Pi(-\gamma)},\end{cases}$$

23. $$\begin{cases} F = A_2F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta-\gamma+1,\ 1-x)\\ \quad +B_2(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x),\\ A_2 = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},\qquad B_2 = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma+1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)},\end{cases}$$

24. $$\begin{cases} F = A_3(1-x)^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)\\ \quad +B_3(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\ \gamma-\beta,\ \alpha-\beta+1,\ \dfrac{1}{1-x}\right),\\ A_3 = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(-\beta)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)},\qquad B_3 = \dfrac{\Pi(-\beta)\Pi(\alpha-\gamma)}{\Pi(\alpha-\beta)\Pi(-\gamma)},\end{cases}$$

25. $$\begin{cases} F = A_4(1-x)^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x)\\ \quad +B_4(1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\ \gamma-\alpha,\ \beta-\alpha+1,\ \dfrac{1}{1-x}\right),\\ A_4 = \dfrac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\gamma)\Pi(-\alpha)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\alpha-1)},\qquad B_4 = \dfrac{\Pi(-\alpha)\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\beta-\alpha)\Pi(-\gamma)},\end{cases}$$

$$26.\quad \begin{cases} F = A_{,}(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1,\frac{1}{1-x}\right) \\ \qquad +B_{,}(1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta-\alpha+1,\frac{1}{1-x}\right), \\ A_{,}=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\alpha-1)}, \qquad B_{,}=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}. \end{cases}$$

Die Constanten dieser anderen fünf Gleichungen (22. bis 26.) sind nicht auf demselben, etwas mühsamen Wege gefunden worden, wie die der Gleichung (21.) oder (19.), sondern diese Gleichungen, zugleich mit den Werthen ihrer Constanten, sind alle aus der Gleichung (21.) hergeleitet worden. Setzt man nämlich in (21.) $\gamma-\alpha$ statt α, $\gamma-\beta$ statt β, und verwandelt die beiden ersten Reihen F dieser Gleichung nach Formel (17.), so erhält man die Gleichung (22.). Eliminirt man nun aus (21.) und (22.) die Function $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$, so erhält man die Gleichung (23.). Die Gleichung (24.) erhält man aus (21.), indem man in dieser die beiden Functionen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ und $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$ nach der Formel (18.) verwandelt und sodann $\gamma-\beta$ statt β und $\frac{x}{x-1}$ statt x, setzt. Durch Vertauschung von α und β erhält man aus (24.) sogleich (25.), und aus diesen beiden wieder (26.) durch Elimination der Function $F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$.

Alle übrigen Gleichungen, welche aus den 24 Integralen des §. 8. gebildet werden können, lassen sich aus diesen sechs ableiten, indem die eine, oder die andere, oder beide Functionen rechts vom Gleichheitszeichen nach den Formeln (17.) oder (18.) verwandelt werden. Es würde zu weitläuftig sein, alle diese leichten Verwandlungen wirklich auszuführen und hier aufzunehmen; es wird hinreichen, zu bemerken, dafs die Anzahl aller dieser Gleichungen, welche nicht mit einander identisch sind, 60 beträgt, wobei alle diejenigen nicht mitgerechnet sind, in welchen convergirende Reihen F mit divergirenden zusammen verbunden sein würden. Rechnet man von diesen noch diejenigen ab, welche blofs durch Vertauschung von α und β aus den andern abgeleitet sind, wie (25.) aus (24.), so ist die Anzahl derselben 50.

Wir haben oben bemerkt, dafs die Formel (17.) sich aus (18.) ableiten läfst; ferner ist gezeigt worden, wie die Formeln (21. bis 26.) sich alle aus (19.) ableiten lassen, und aus diesen wieder 54 andere. Alle bis jetzt gefundenen Formeln für die Verwandlung der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$,

deren Gesammtzahl 62 ist, können aus folgenden zweien abgeleitet werden:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right),$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x,)$$
$$= A x^{1-\gamma} F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x) + B F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x),$$

und diese können daher als Fundamentalgleichungen für die Verwandlung dieser Reihe gelten.

§. 12.

Verwandelt man in der Formel (26.) §. 11. die beiden Reihen rechts vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.), so erhält man:

$$27.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x) = A_5(-x)^{-\alpha} F\left(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{x}\right)$$
$$+ B_5(-x)^{-\beta} F\left(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,\frac{1}{x}\right).$$

Wenn in dieser Formel der absolute Werth von $x<1$ angenommen wird, so convergirt die Reihe links vom Gleichheitszeichen, die beiden andern aber divergiren; wird aber der absolute Werth von $x>1$ angenommen, so divergirt die erste Reihe, die beiden andern aber convergiren. Die Gleichung (27.) scheint daher ganz unbrauchbar zu sein. Nichtsdestoweniger aber hat auch eine solche Gleichung noch einen richtigen Sinn, und zwar den, daſs, wenn irgend eine Function von x für die Werthe des x, welche kleiner als die Einheit sind, in die Reihe links vom Gleichheitszeichen sich entwickeln läſst, dieselbe für die Werthe des x, welche gröſser als 1 sind, in die beiden Reihen rechts vom Gleichheitszeichen entwickelt werden kann. Setzt man zum Beispiel in der Formel (27.) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$, $\gamma=1$, $x=-z^2$, so erhält man, wenn mit z multiplicirt wird:

$$zF(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},-z^2) = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{z}F\left(\tfrac{1}{2},1,\tfrac{3}{2},\frac{1}{-z}\right),$$

in der That läſst sich aber die Function arc. tang. z, wenn $z<1$ ist, in die Reihe $zF(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-z^2)$, und, wenn $z>1$ ist, in $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{z}F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},-\frac{1}{z^2}\right)$ convergirend entwickeln. Auſserdem werden wir in der Folge noch einmal Gelegenheit haben, diese Formel (27.) auf eine gewisse Art der Verwandlung semiconvergenter Reihen in stets convergirende anzuwenden.

Was die Anwendung der hier gefundenen Formeln betrifft, so mag es für jetzt hinreichen, kurz anzudeuten, welchen Nutzen dieselben für die Berechnung numerischer Werthe der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ gewähren. Durch

die Formel (18.) kann man jede Reihe, in welcher das letzte Element x negativ ist, in eine andere umformen, in welcher dasselbe positiv ist. Ferner kann man durch die Formel (23.) jede Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, in welcher x positiv und $>\frac{1}{2}$, durch zwei andere ausdrücken, deren letztes Element $<\frac{1}{2}$ ist. Besonders diese Umformung ist für die numerische Berechnung höchst vortheilhaft; denn da die Reihe F nach Potenzen des letzten Elementes geordnet ist, so wird sie desto rascher convergiren, je kleiner dasselbe ist. Im ungünstigsten Falle, wo das letzte Element dem Werthe $\frac{1}{2}$ sehr nahe kommt, wird man die Werthe der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ immer noch durch Reihen berechnen können, in denen jedes folgende Glied kleiner als die Hälfte des vorhergehenden ist. Indessen leidet diese Regel eine Ausnahme: die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ läfst sich nämlich nicht durch zwei Reihen ausdrücken, deren letzte Elemente $1-x$ sind, sobald $\gamma-\alpha-\beta$ eine ganze positive oder negative Zahl ist; in diesem Falle schliefst nämlich die Formel (23.) unendliche Quantitäten ein, und wird dadurch unbrauchbar.

§. 13.

Aufser diesen Gleichungen zwischen zwei und drei Functionen F läfst sich aus den gefundenen particulären Integralen der Gleichung (1.), welche im Paragraph 8. zusammengestellt sind, noch eine ganz andere Art von Gleichungen ableiten.

Wenn nämlich die Differenzialgleichung (1.) durch zwei Integrale erfüllt wird, welche ich durch $y_{,}$ und $y_{,,}$ bezeichne, so ist:

$$\frac{d^2y_{,}}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy_{,}}{dx}-\frac{\alpha\beta y_{,}}{x(1-x)}=0,$$

$$\frac{d^2y_{,,}}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy_{,,}}{dx}-\frac{\alpha\beta y_{,,}}{x(1-x)}=0.$$

Multiplicirt man die erste dieser beiden Gleichungen mit $y_{,,}$, die zweite mit $y_{,}$, und subtrahirt, so erhält man:

$$y_{,,}\frac{d^2y'}{dx^2}-y_{,}\frac{d^2y_{,,}}{dx^2}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\left(y_{,,}\frac{dy_{,}}{dx}-y_{,}\frac{dy_{,,}}{dx}\right)=0.$$

Setzt man $y_{,,}\frac{dy_{,}}{dx}-y_{,}\frac{dy_{,,}}{dx}=V$, so geht diese Gleichung über in:

$$\frac{dV}{dx}+\frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)x}{x(1-x)}\cdot V=0,$$

und das Integral dieser Gleichung ist

$$V=C.x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Setzt man nun für V seinen Werth zurück, so hat man folgende Gleichung zwischen den zwei Integralen $y_{,}$ und $y_{,,}$ und ihren ersten Differenzialquotienten:

$$28.\quad y_{,,}\frac{dy_{,}}{dx}-y_{,}\frac{dy_{,,}}{dx}=C.x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Man vergleiche hierüber eine Abhandlung von Abel in diesem Journale Band II. pag. 22.

Nimmt man nun zunächst die beiden Integrale 1 und 3, §. 8.:

$$y_{,,}=F(\alpha,\beta,\gamma,x),\qquad y_{,}=x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x),$$

so wird:

$$\frac{dy_{,,}}{dx}=\frac{\alpha.\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),$$

$$\frac{dy_{,}}{dx}=(1-\gamma)x^{-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$
$$+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2-\gamma}x^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+2,\beta-\gamma+2,3-\gamma,x).$$

Diese Werthe in der Gleichung (28.) substituirt, geben, nachdem durch $x^{-\gamma}$ dividirt ist:

$$C.(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}=\frac{\alpha.\beta}{\gamma}xF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$
$$-F(\alpha,\beta,\gamma,x)\Big((1-\gamma)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma,x)$$
$$+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{2-\gamma}xF(\alpha-\gamma+2,\beta-\gamma+2,3-\gamma,x)\Big).$$

Setzt man zur Bestimmung der Constante $x=0$, so findet man $C=\gamma-1$, und man kann diese Gleichung so darstellen:

$$29.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$
$$+\frac{\alpha.\beta}{\gamma(\gamma-1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)$$
$$+\frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(1-\gamma)(2-\gamma)}xF(\alpha,\beta,\gamma,x)F(\alpha-\gamma+2,\beta-\gamma+2,3-\gamma,x)=(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Wir wollen noch eine andere Formel dieser Art herleiten aus den beiden Integralen 1, und 5, des §. 8.,

$$=F(\alpha,\beta,\gamma,x),\qquad y_{,,}=F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x),$$

woraus

$$\frac{dy_{,}}{dx}=\frac{\alpha.\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x),$$

$$\frac{dy_{,,}}{dx}=\frac{-\alpha.\beta}{\alpha+\beta-\gamma+1}F(\alpha+1,\beta+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x).$$

Diese Werthe in der Gleichung (28.) substituirt, geben, wenn durch $\frac{\alpha.\beta}{\gamma}$

dividirt und dies mit der noch zu bestimmenden Constante C verbunden wird:

$$30.\quad F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$
$$+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma+1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(\alpha+1,\beta+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x)$$
$$=Cx^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}.$$

Um die Constante C zu bestimmen, verwandle man die beiden Reihen $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)$ und $F(\alpha+1,\beta+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x)$ nach Formel (17.), so erhält man, nachdem durch $x^{-\gamma}$ dividirt ist,

$$31.\quad xF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$$
$$+\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma+1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x)$$
$$=C(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

Wird nun $x=0$ gesetzt so ist

$$32.\quad C=\frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma+1}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1)$$
$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma)}{\Pi(\alpha)\Pi(\beta)}.$$

Die Gleichungen (29.) und (30.) lassen sich auf unendlich verschiedene Arten umformen und vervielfältigen; nämlich nicht nur durch die im §. 9. und §. 11. gefundenen Verwandlungen der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, sondern auch durch die Reductionsformeln, welche Gaufs in seiner Abhandlung pag. 9 bis 12 unter dem Namen *relationes inter functiones contiguas* aufgestellt hat. Wir wollen einige dieser Verwandlungen auf die Formel (31.) anwenden.

Wenn in (31.) die beiden Reihen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ und $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$ nach Formel (17.) verwandelt werden, sodann durch $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$ dividirt und für C sein Werth gesetzt wird, so ist:

$$xF(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+1,1-x)F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma+1,x)$$
$$+\frac{\gamma(1-x)}{\alpha+\beta+1-\gamma}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,x)F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,\alpha+\beta-\gamma+2,1-x)$$
$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma)}{\Pi(\alpha)\Pi(\beta)}.$$

Wird ferner $\gamma-\alpha$ statt α und $\gamma-\beta$ statt β gesetzt, so wird

$$33.\quad xF(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)F(\alpha,\beta,\gamma+1,x)$$
$$+\frac{\gamma(1-x)}{\gamma-\alpha-\beta+1}F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+2,1-x)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-\alpha-\beta)\Pi(\gamma)}{\Pi(\gamma-\alpha)\Pi(\gamma-\beta)}.$$

Nun ist aber nach einer bekannten Reductionsformel (Gaufs Abhdl. pag. 9. Gl. 8.)

$$xF(\alpha,\beta,\gamma+1,x)=\frac{\gamma}{\gamma-\beta}(F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)-(1-x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)),$$

und daher auch

$$(1-x)F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+2,1-x)=$$
$$\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{\gamma-\alpha}(F(-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)-xF(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)).$$

Werden diese Werthe in (33.) substituirt, so erhält man, nach einigen Reductionen, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}34.\quad &(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)\\ &+(\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma,x)F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)\\ &-(\gamma-\alpha+(\alpha-\beta)x)F(\alpha,\beta,\gamma,x)F(1-\alpha,1-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1,1-x)\\ &=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}.\end{aligned}$$

In der Folge werden wir Gelegenheit haben, von dieser Formel eines sehr wichtigen speciellen Falles zu erwähnen.

Abschnitt III.

Speciellere Umformungen der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche statt haben, indem von den drei Elementen α, β, und γ nur zwei beliebig bleiben.

§. 14.

Da nun im vorigen Abschnitte alle Integrale von der Form $wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ gefunden sind, welche der Differenzialgleichung (1.) unter der Voraussetzung genügen, dafs die drei Elemente α, β, γ ganz unabhängig von einander sind, und da die aus denselben entspringenden Gleichungen, welche die allgemeinen Eigenschaften der Function $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ausdrücken, gebildet worden sind: so ist nun noch zu untersuchen, ob vielleicht in specielleren Fällen, wo die drei Elemente α, β, γ nicht ganz unabhängig von einander sind, noch wesentlich andere Integrale von der Form $y=wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ und somit auch neue, wenn gleich speciellere, Gleichungen für die Function F sich ergeben möchten.

Es soll also angenommen werden, unter den Gröfsen α, β, γ finde eine Bedingungsgleichung Statt, von der Form

$$n\alpha+n'\beta+n''\gamma+n'''=0,$$

wo n', n'' etc. constante Zahlencoefficienten sind. Diese Gleichung mag unter folgende bequemere Form gesetzt werden:

$$1. \quad \gamma = m\alpha + m'\beta + m''.$$

Den Fall $n''=0$ in jener Form schließt zwar diese aus: es soll aber später gezeigt werden, wie dieser Fall sich aus den anderen ableiten läßt. Die Aufgabe dieses Abschnittes kann nun auf eben dieselbe Weise gelöset werden, wie die des vorigen Abschnittes, indem untersucht wird, welche Integrale von der Form $wF(\alpha', \beta', \gamma', z)$ der Differenzialgleichung (1.) §. 4. genügen, wenn $\gamma = m\alpha + m'\beta + m''$ gesetzt wird, so daß noch α und β beliebig bleiben. Es ist jedoch zweckmäßiger, die Aufgabe hier etwas anders zu stellen, und zwar so:

Die Integrale von der Form $wF(\alpha, \beta, m\alpha + m'\beta + m''', z)$ zu finden, welche der Differenzialgleichung

$$2. \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)x}{x(1-x)} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha'\beta' y}{x(1-x)} = 0$$

genügen, wenn

$$3. \quad \begin{cases} \alpha' = \lambda\alpha + \lambda'\beta + \lambda'', \\ \beta' = \mu\alpha + \mu'\beta + \mu'', \\ \gamma' = \nu\alpha + \nu'\beta + \nu'' \end{cases}$$

und die aus diesen Integralen entspringenden Gleichungen zu bilden. Diese Änderung läuft nur darauf hinaus, die gestrichenen Größen α', β', γ' mit den ungestrichenen α, β, γ zu vertauschen. Die Gleichungen, aus welchen w und z bestimmt werden, sind daher jetzt:

$$4. \quad w^2 = c.x^{-\gamma'}(1-x)^{\gamma'-\alpha'-\beta'-1} z^{\gamma}(1-z)^{-\gamma+\alpha+\beta+1} \frac{dx}{dz},$$

$$5. \quad 2\frac{d^3z}{dz\,dx^2} - 3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 - \frac{Az^2+Bz+C}{z^2(1-z)^2} \cdot \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{A'x^2+B'x+C'}{x^2(1-x)^2} = 0,$$

wo A, B, C, A', B' und C' dieselben Bedeutungen haben, wie in der Gleichung (4.) des vorigen Abschnittes, und wo für γ sowohl als für α', β' und γ' die angenommenen Werthe aus (1.) und (3.) zu setzen sind. Substituirt man diese Werthe des γ und α', β', γ' in der Gleichung (5.), so erhält man eine Gleichung, in welcher α und β vorkommen; und da diese beiden Größen ganz beliebig sein sollen, so müssen hier alle Theile dieser Gleichung, welche α^2, β^2, $\alpha\beta$, α, β zu Factoren haben, für sich verschwinden, so daß in dem gegenwärtigen Falle die Gleichung (5.) in sechs einzelne Gleichungen zerfällt, welche alle denselben Werth des z geben müssen. Die Quantität Az^2+Bz+C für diesen Zweck entwickelt, wird

$$Az^2+Bz+C=(z-m)^2\alpha^2+(z-m')^2\beta^2+(-z^2-(m+m'-2)z+mm')2\alpha\beta$$
$$+((m-m'')z+m(m''-1))2\alpha+((m'-m'')z+m'(m''-1))2\beta+z^2+2m''z+m''(m-2).$$

Die Quantität $A'x^2+B'x+C'$ eben so entwickelt wird die Form haben:

$$A'x^2+B'x+C'=p\,\alpha^2+q.\beta^2+r.2\alpha\beta+s.2\alpha+t.2\beta+u,$$

wo die Größen p, q, r, s, t, u sämmtlich Trinomien von der Form ax^2+bx+c sind, deren nähere Bestimmung jetzt unnöthig sein würde. Werden also nun alle Theile der Gleichung (5.), welche α^2, β^2, $\alpha\beta$, α, β zu Factoren haben, einzeln gleich 0 gesetzt, so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$6.\quad \frac{p}{x^2(1-x)^2}=\frac{(z-m)^2dz^2}{z^2(1-z)^2dx^2},$$

$$7.\quad \frac{q}{x^2(1-x)^2}=\frac{(z-m')^2dz^2}{z^2(1-z)^2dx^2},$$

$$8.\quad \frac{r}{x^2(1-x)^2}=\frac{-z^2+(2-m-m')z+mm'}{z^2(1-z)^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$9.\quad \frac{s}{x^2(1-x)^2}=\frac{(m-m'')z+m(m''-1)}{z^2(1-z)^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$10.\quad \frac{t}{x^2(1-x)^2}=\frac{(m'-m'')z+m'(m''-1)}{z^2(1-z)^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2},$$

$$11.\quad \frac{u}{x^2(1-x)^2}=\frac{-z^2+2m''z+m''(m''-2)}{z^2(1-z)^2}\cdot\frac{dz^2}{dx^2}-2\frac{d^3z}{dz\,dx^3}+3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2.$$

Aus diesen Gleichungen sollen nun zunächst wieder die allgemeinen Formen gesucht werden, welche z als Function von x haben kann.

Die Gleichungen (9.) und (10.) durch einander dividirt geben:

$$12.\quad \frac{s}{t}=\frac{(m-m'')z+m(m''-1)}{(m'-m'')z+m'(m''-1)},$$

also mit Ausnahme der Fälle $m=m'$, $m''=1$ und $m''=0$, in welchen Fällen z ganz aus der Gleichung (12.) verschwindet, kann z durch diese Gleichung als rationale Function von s und t dargestellt werden, und ist somit auch rationale Function von x.

Ferner die Gleichungen (6.) und (7.) durch einander dividirt geben:

$$13.\quad \frac{p}{q}=\left(\frac{z-m}{z-m'}\right)^2.$$

Da nun, mit Ausnahme der angegebenen Fälle, z eine rationale Function von x ist, so muſs sich aus beiden Theilen der Gleichung (13.) die Quadratwurzel rational ausziehen lassen, und deshalb müssen p und q beide vollständige Quadrate sein. Wenn dies aber der Fall ist, so erhält man aus Gleichung (13.) für z die Form:

$$z=\frac{ax+b}{cx+d}.$$

Diese Form des z ist aber schon im vorigen Abschnitte vollständig untersucht worden, und kann daher überall, wo sie hier vorkommt, verworfen werden. Es folgt also hieraus, daſs nur dann, wenn eine der Gleichungen

$$m=m',\qquad m''=1,\qquad m''=0$$

Statt hat, ein passender Werth des z gefunden werden kann.

§. 15.

Es soll nun zuerst der Fall untersucht werden, wo m nicht $=m'$, wo also entweder $m''=1$ oder $m''=0$ sein muſs. In diesem Falle erhält man aus (13.) für den Werth des z:

$$14.\qquad z=\frac{m'\sqrt{p}-m\sqrt{q}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}:$$

und hieraus zieht man:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{(m'-m)\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)}{2\sqrt{pq}(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2},$$

$$z(1-z)=\frac{(m'\sqrt{p}-m\sqrt{q})((1-m')\sqrt{p}-(1-m)\sqrt{q})}{(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2},$$

$$z-m=\frac{(m'-m)\sqrt{p}}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}.$$

Werden diese Werthe in der Gleichung (6.) substituirt, so wird

$$\frac{p}{x^2(1-x)^2}=\frac{(m'-m)^4\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)^2}{4q(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2(m'\sqrt{p}-m\sqrt{q})^2((1-m')\sqrt{p}-(1-m)\sqrt{q})^2}.$$

Der Theil rechts vom Gleichheitszeichen muſs nun rational sein, weil der andere Theil dieser Gleichung rational ist, und dies ist, wie man leicht sieht, nur in folgenden vier Fällen möglich:

$$16.\qquad \begin{cases} m=1 \text{ und } m'=-1, & m=0 \text{ und } m'=2,\\ m=-1 \text{ und } m'=1, & m=2 \text{ und } m'=0.\end{cases}$$

Die beiden letzten dieser Fälle können unberücksichtigt bleiben, da sie durch Vertauschung von α und β, m' und m, sich aus den beiden andern ableiten lassen.

Für den Fall $m=1$, $m'=-1$ geht die Gleichung (15.) über in:

$$17.\qquad \frac{p^2q}{x^2(1-x)^2}=\frac{\left(p\frac{dq}{dx}-q\frac{dp}{dx}\right)^2}{(p-q)^2},$$

und der andere Fall $m=0$ und $m'=2$ giebt genau dieselbe Gleichung, so daſs für beide Fälle sich aus dieser Gleichung (17.) dieselben Werthe

von p und q ergeben müssen. Der eine Theil dieser Gleichung ist ein vollständiges Quadrat; also mufs es der andere auch sein, und deshalb mufs q ein vollständiges Quadrat sein. Setzt man also:

$$q=(a+bx)^2, \qquad p=a'+2b'x+c'x^2,$$

so erhält man aus der Gleichung (14.) folgende zwei Formen des z, in dem Falle, dafs m und m' einander nicht gleich sind:

Wenn $m=1$, $m'=-1$, so ist:

$$18. \qquad z=\frac{a+bx\pm\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}{a+bx\mp\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}.$$

Wenn $m=0$, $m'=2$:

$$19. \qquad z=\frac{\pm2\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}{a+bx\pm\sqrt{(a'+2b'x+c'x^2)}}.$$

§. 16.

Nachdem nun für den Fall, dafs m nicht $=m'$, die Formen des z gefunden sind, so ist noch der andere Fall zu untersuchen, wo $m=m'$ ist. In diesem Falle geben die Gleichungen (6.) und (8.), durch einander dividirt:

$$20. \qquad \frac{r}{p}=\frac{m^2-2(m-1)z-z^2}{(m-z)^2},$$

und die Gleichungen (6.) und (9.) geben eben so:

$$21. \qquad \frac{s}{p}=\frac{m(m''-1)-(m''-m)z}{(m-z)^2}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{r+2s}{p}=\frac{m^2+2m(m''-1)-2(m''-1)z-z^2}{(m-z)^2},$$

und da der gemeinschaftliche Factor $m-z$ aus Zähler und Nenner sich hinweghebt:

$$22. \qquad \frac{r+2s}{p}=\frac{m+2m''-2+z}{m-z}.$$

Hieraus ist klar, dafs, den einzigen Fall ausgenommen, wo $m+2m''-2=-m$, d. i. $m''=1-m$ ist, z eine rationale Function von x sein mufs. Aus (20.) erhält man nun aber durch Auflösung der quadratischen Gleichung folgenden Werth des z:

$$23. \qquad z=\frac{mr-(m-1)p\pm p\sqrt{\left((2m^2-2m+1)-2m(m-1)\frac{r}{p}\right)}}{r+p},$$

und damit dieser in Beziehung auf $\frac{r}{p}$, oder, was dasselbe ist, in Beziehung auf x rational sei, mufs entweder $m=0$ oder $m=1$ sein.

Für den Fall $m=0$ und $m'=0$ ist aber

$$24.\qquad z=\frac{2p}{r+p}.$$

Für den Fall $m=1$, $m'=1$ ist

$$25.\qquad \alpha=\frac{r-p}{r+p}.$$

Für den Fall $m''=1-m$, für welchen z nicht eine rationale Function sein mufste, mufs die in der Gleichung (23.) enthaltene allgemeinere Form genommen werden, welche sich jedoch sehr vereinfacht, indem hier, wie bald gezeigt werden soll, m nur den Werth $\frac{1}{2}$ haben kann.

Es mögen die in diesem Abschnitte erlangten Resultate der Hauptsache nach jetzt noch einmal kurz zusammengestellt werden.

Der Differenzialgleichung (2.) kann nur dann ein passendes Integral von der Form $y=wF(\alpha,\beta,m\alpha+m'\beta+m'',z)$ genügen, wenn

$$26.\quad\begin{cases}1)\ m=1, & m'=1, \quad \text{also } y=wF(\alpha,\beta,\alpha-\beta+m'',z),\\ 2)\ m=0, & m'=2, \quad \text{also } y=wF(\alpha,\beta,2\beta+m'',z),\\ 3)\ m=0, & m'=0, \quad \text{also } y=wF(\alpha,\beta,m'',z),\\ 4)\ m=1, & m'=1, \quad \text{also } y=wF(\alpha,\beta,\alpha+\beta+m'',z),\\ 5)\ m=1-m'', & m'=1-m'', \quad \text{also } y=wF(\alpha,\beta,m\alpha+m\beta+1-m,z).\end{cases}$$

§. 17.

Es sollen nun zunächst nur für die Fälle 1) und 3) die Werthe des z wirklich bestimmt werden, weil nachher gezeigt werden wird, dafs aus diesen sich die Werthe, welche z in allen übrigen Fällen haben kann, sehr leicht ableiten lassen.

Für den Fall $m=1$, $m'=-1$ haben wir oben für z die Form gefunden:

$$27.\qquad z=\frac{\sqrt{q}+\sqrt{p}}{\sqrt{q}-\sqrt{p}},$$

wo

$$q=(a+bx)^2,\qquad p=a'+2b'x+c'x^2.$$

Diese Werthe in der Gleichung (17.) substituirt, geben, nachdem auf beiden Seiten die Quadratwurzel ausgezogen ist:

$$28.\qquad \frac{a'+2b'x+c'x^2}{x(1-x)}=\pm\frac{2(ba'-ab')+2(bb'-ac')x}{(a'-a^2)+2(b'-ab)x+(c'-b^2)x^2}.$$

Man darf in dieser Gleichung nur das obere Zeichen + berücksichtigen; denn die Werthe der a, b, a', b', c', welche dem Zeichen − entsprechen, erhält man, indem man die Vorzeichen vor a und b verändert, welches

wieder darauf hinausläuft, $\sqrt{p}$ mit dem Zeichen $\pm$ zu nehmen. Werden nun die Nenner dieser Gleichung durch Multiplication hinweggebracht, und die Coefficienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich gesetzt, so erhält man folgende fünf Gleichungen zur Bestimmung der fünf Gröfsen a, b, a', b', c':

$$29.\quad \begin{cases} 1)\ a'(a'-a^2)=0, \\ 2)\ c'(c'-b^2)=0, \\ 3)\ a'(b'-ab)+b'(a'-a^2)=ba'-ab', \\ 4)\ b'(c'-b^2)+c'(b'-ab)=ae'-bb', \\ 5)\ a'(c'-b^2)+4b'(b'-ab)+c'(a'-a^2)=2bb'-2ac'-2a'b+2ab'. \end{cases}$$

Alle möglichen Werthe der Quantitäten a, b, a', b', c' zu finden, welche diesen fünf Gleichungen genügen, hat gar keine Schwierigkeiten. Wenn man alle diejenigen verwirft, welche dem z in der Gleichung (27.) einen Werth von der Form $\frac{mx+n}{\mu x+\nu}$, oder welche $z=$ const. geben würden, so findet man folgende neun Bestimmungen dieser Gröfsen:

$$30.\quad \begin{cases} 1)\ a=0, & b=1, & a'=0, & b'=\tfrac{1}{2}, & c'=0. \\ 2)\ a=1, & b=0, & a'=0, & b'=\tfrac{1}{2}, & c'=0. \\ 3)\ a=1, & b=1, & a'=0, & b'=2, & c'=0. \\ 4)\ a=0, & b=-1, & a'=0, & b'=-\tfrac{1}{2}, & c'=1. \\ 5)\ a=1, & b=-1, & a'=0, & b'=-\tfrac{1}{2}, & c'=1. \\ 6)\ a=1, & b=-2, & a'=0, & b'=-2, & c'=4. \\ 7)\ a=-1, & b=0, & a'=1, & b'=-\tfrac{1}{2}, & c'=0. \\ 8)\ a=-1, & b=1, & a'=1, & b'=-\tfrac{1}{2}, & c'=0. \\ 9)\ a=-2, & b=1, & a'=4, & b'=-2, & c'=0. \end{cases}$$

Diesen entsprechen nun, nach Gleichung (27.), folgende Werthe des z:

$$31.\quad \begin{cases} 1)\ z=\frac{x\pm\sqrt{x}}{x\mp\sqrt{x}}, & 2)\ z=\frac{1\pm\sqrt{x}}{1\mp\sqrt{x}}, & 3)\ z=\frac{1+x\pm2\sqrt{x}}{1+x\mp2\sqrt{x}}, \\ 4)\ z=\frac{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{-x\mp\sqrt{(x^2-x)}}, & 5)\ z=\frac{1-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{1-x\mp\sqrt{(x^2-x)}}, & 6)\ z=\frac{1-2x\pm2\sqrt{(x^2-x)}}{1-2x\mp2\sqrt{(x^2-x)}}, \\ 7)\ z=\frac{-1\pm\sqrt{(1-x)}}{-1\mp\sqrt{(1-x)}}, & 8)\ z=\frac{-1+x\pm\sqrt{(1-x)}}{-1+x\mp\sqrt{(1-x)}}, & 9)\ z=\frac{-2+x\pm2\sqrt{(1-x)}}{-2+x\mp2\sqrt{(1-x)}}, \end{cases}$$

welche dem Falle $m=1$, $m'=-1$ angehören, oder die Werthe des z, für welche $y=w\,F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+m''\,z)$ der Differenzialgleichung (2.) genügt.

Eben so soll nun noch der Fall $m=0$, $m'=0$ untersucht werden, für welchen oben, Gleichung (24.), für z die Form gefunden wurde:

$$32. \quad z = \frac{2p}{r+p}.$$

Diesen Werth des z in der Gleichung (6.) substituirt, giebt:

$$33. \quad \frac{p}{x^2(1-x)^2} = \frac{4\left(r\frac{dp}{dx}-p\frac{dr}{dx}\right)^2}{(p+r)^2 p(p-r)^2},$$

woraus man sogleich ersieht, dafs p ein vollständiges Quadrat sein mufs. Setzt man nun:

$$p = (a+bx)^2 \quad \text{und} \quad p+r = 2(a'+2b'x+c'x^2),$$

so verwandelt sich diese Gleichung in:

$$34. \quad \frac{a'+2b'x+c'x^2}{x(1-x)} = \pm\frac{2(ba'-ab')+2(bb'-ac')x}{(a'-a^2)+2(b'-ab)x+(c'-b^2)x^2}.$$

Diese Gleichung ist ganz dieselbe, wie Gleichung (28.), und mufs deshalb auch dieselben Werthe der Quantitäten a, b, a', b', c' geben. Wenn man nun wieder diejenigen, welche $z =$ const., oder z von der Form $\frac{mx+a}{\mu x+\nu}$ geben würden, verwirft, so kann man von den bei (30.) gefundenen Werthen nur die drei Werthe (3.), (6.) und (9.) in dem gegenwärtigen Falle anwenden, mufs jedoch jetzt folgende drei:

$$a = -1, \quad b = 2, \quad a' = 1, \quad b' = 0, \quad c' = 0,$$
$$a = -2, \quad b = 1, \quad a' = 0, \quad b' = 0, \quad c' = 1,$$
$$a = 1, \quad b = 1, \quad a' = 0, \quad b' = -1, \quad c' = 1,$$

welche in dem vorigen Falle verworfen wurden, hier hinzunehmen. Man erhält so folgende sechs Werthe des z, welche dem Falle $m = 0$, $m' = 0$ angehören, oder für welche $y = w F(\alpha, \beta, m'', z)$ der Differenzialgleichung (2.) genügt:

$$35. \quad \begin{cases} 1) \; z = \frac{(1+x)^2}{4x}, & 2) \; z = (1-2x)^2, & 3) \; z = \left(\frac{2-x}{x}\right)^2, \\ 4) \; z = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2, & 5) \; z = \frac{(1-2x)^2}{4x^2-4x}, & 6) \; z = \frac{(2-x)^2}{4-4x}, \end{cases}$$

§. 17.

Aus den im vorigen Paragraphen gefundenen Werthen des z sollen nun alle übrigen hergeleitet werden. Dies geschieht durch Anwendung der Sätze (4.) und (5.) des §. 7.

Wenn nämlich der Differenzialgleichung (2.) ein Integral $y = w F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+m'', z)$ genügt, so geht aus dem Satze (4.) §. 7. hervor, dafs derselben auch das Integral $y = w F(\alpha, \beta, 2\beta - m''+1, 1-z)$ genügen mufs. Die Werthe des z also, welche dem Falle $m = 0$, $m' = 2$

angehören, erhält man unmittelbar aus den bei (31.) für den Fall $m=1$, $m'=-1$ gefundenen, indem man dieselben von der Einheit abzieht; welches auch genau mit den bei (18.) und (19.) gefundenen Formen dieser Werthe übereinstimmt. Diese Werthe des z, für welche $y=F(\alpha,\beta,2\beta+m'',z)$ der Differenzialgleichung (2.) genügt, sind daher:

$$36.\quad\begin{cases}1)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{x}}{x\pm\sqrt{x}}, & 2)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{x}}{1\pm\sqrt{x}}, & 3)\ z=\frac{\pm 4\sqrt{x}}{1+x\pm 2\sqrt{x}},\\ 4)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{(x^2-x)}}{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}, & 5)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{(x^2-x)}}{1-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}, & 6)\ z=\frac{\pm 4\sqrt{(x^2-x)}}{1-2x\pm 2\sqrt{(x^2-x)}},\\ 7)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{(1-x)}}{-1\pm\sqrt{(1-x)}}, & 8)\ z=\frac{\pm 2\sqrt{(1-x)}}{-1+x\pm\sqrt{(1-x)}}, & 9)\ z=\frac{\pm 4\sqrt{(1-x)}}{-2+x\pm 2\sqrt{(1-x)}}.\end{cases}$$

Wenn ferner der Differenzialgleichung (2.) das Integral $y=wF(\alpha,\beta,\alpha-\beta+m'',z)$ genügt, so muſs nach dem Satze (5.) §. 7. derselben auch das Integral $y=(1-z)^{-\alpha}wF\left(\alpha,\alpha-2\beta+m'',\alpha-\beta+m'',\frac{z}{z-1}\right)$ genügen: oder wenn statt β gesetzt wird $\frac{\alpha-\beta+m''}{2}$, so muſs der Differenzialgleichung (2.) (in welcher jedoch nun die Quantitäten α', β', γ' andere Werthe haben) das Integral $y=(1-z)^{-\alpha}wF\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+m''}{2},\frac{z}{z-1}\right)$ genügen. Ein solches Integral kann aber nicht Statt haben, auſser wenn $m''=1$, wo es mit dem fünften Falle bei (26.) zusammenstimmt. Die diesem Falle angehörenden Werthe des z lassen sich also ebenfalls aus den bei (31.) für den Fall $m=1$, $m'=-1$ gefundenen herleiten. Und zwar wenn ein beliebiger von diesen durch $z_{,}$ bezeichnet wird, so wird der entsprechende Werth, welcher dem Falle $m=m'=1-m''$ (oder, wie jetzt näher bestimmt worden, $m=\frac{1}{2}$, $m'=\frac{1}{2}$, $m''=\frac{1}{2}$) angehört, $\frac{z_{,}}{z_{,}-1}$ sein. Diese Werthe des z, für welche $y=wF\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},z\right)$ der Differenzialgleichung (2.) genügt, sind daher:

$$37.\quad\begin{cases}1)\ z=\frac{x\pm\sqrt{x}}{\pm 2\sqrt{x}}, & 2)\ z=\frac{1\pm\sqrt{x}}{\pm 2\sqrt{x}}, & 3)\ z=\frac{1+x\pm 2\sqrt{x}}{\pm 4\sqrt{x}}\\ 4)\ z=\frac{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{\pm 2\sqrt{(x^2-x)}}, & 5)\ z=\frac{1-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{\pm 2\sqrt{(x^2-x)}}, & 6)\ z=\frac{1-2x\pm 2\sqrt{(x^2-x)}}{\pm 4\sqrt{(x^2-x)}}\\ 7)\ z=\frac{-1\pm\sqrt{(1-x)}}{\pm 2\sqrt{(1-x)}}, & 8)\ z=\frac{-1+x\pm\sqrt{(1-x)}}{\pm 2\sqrt{(1-x)}}, & 9)\ z=\frac{-2+x\pm 2\sqrt{(1-x)}}{\pm 4\sqrt{(1-x)}}\end{cases}$$

Auf dieselbe Weise werden aus den gefundenen sechs Werthen des z, welche dem Falle $m=m'=0$ angehören, diejenigen gefunden, welche

dem Falle $m=m'=1$ entsprechen. Wenn nämlich ein Integral $y=wF(\alpha,\beta,m'',z)$ der Differenzialgleichung (2.) genügt, so folgt aus dem Satze (4.) §. 7., dafs derselbe auch das Integral $y=wF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-m''+1,1-z)$ genügen mufs. Man findet also die Werthe des z, welche dem Falle $m=m'=1$ entsprechen, indem man die bei (35.) für den Fall $m=m'=0$ gefundenen von der Einheit abzieht. Dieselben sind daher:

$$38.\quad \begin{cases} 1)\;\; z=\frac{-(1-x)^2}{4x}, & 2)\;\; z=4x(1-x), \qquad 3)\;\; z=\frac{4(x-1)}{x^2}, \\ 4)\;\; z=\frac{-4x}{(1-x)^2}, & 5)\;\; z=\frac{1}{4x(1-x)}, \qquad 6)\;\; z=\frac{x^2}{4(x-1)}. \end{cases}$$

Wir haben zu Anfange dieses Abschnittes §. 14., jener Bedingungsgleichung $n\alpha+n'\beta+n''\gamma+n'''=0$, welche unter den Quantitäten α,β,γ Statt haben sollte, die Form gegeben $\gamma=m\alpha+m'\beta+m''$, und haben bemerkt, dafs diese Form den Fall $n''=0$ in der vorigen ausschliefst. Dieser Fall mufs jetzt der Vollständigkeit wegen besonders betrachtet werden. Wenn $n''=0$, so kann dieser Bedingungsgleichung die Form $\beta=n\alpha+n'$ gegeben werden; es ist daher noch zu untersuchen, in welchen Fällen der Differenzialgleichung (2.) ein Integral von der Form $y=wF(\alpha,n\alpha+n',\gamma,z)$ genügen kann. Wenn nun ein solches Integral genügt, so mufs nach dem Satze (1.) §. 7. auch ein Integral $y=(1-z)^{\gamma-n\alpha-\alpha-n'}F(\gamma-\alpha,\gamma-n\alpha-n',\gamma,z)$ genügen, oder wenn gesetzt wird $\frac{\alpha-\beta-n'}{n-1}$ statt α und $\frac{n\alpha-\beta-n'}{n-1}$ statt γ, so mufs dieser Differenzialgleichung das Integral genügen: $y=(1-z)^{\frac{n\beta-\alpha+n'}{n-1}}wF\left(\alpha,\beta,\frac{n\alpha}{n-1}-\frac{\beta}{n-1}-\frac{n'}{n-1},z\right)$.
Die Integrale von der Form $y=wF(\alpha,n\alpha+n',\gamma,z)$ können also keine anderen Werthe des z haben, als die von der Form $y=wF(\alpha,\beta,m\alpha+m'\beta+m'',z)$, welche oben gefunden worden sind, mit Ausnahme des einzigen Falles $n=1$; denn für diesen pafst die so eben vorgenommene Umformung nicht. Wenn nun aber ein Integral $y=wF(\alpha,\alpha+n',\gamma,z)$ genügen soll, so mufs nach dem Satze (4.) §. 7. auch das Integral $w(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\alpha-n',\gamma,\frac{z}{z-1}\right)$ genügen, oder wenn $\gamma=\alpha+\beta+n'$ gesetzt wird, so mufs auch das Integral $y=w(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha,\beta,\alpha+\beta+n',\frac{1}{z-1}\right)$ genügen. Die diesem Integrale (oder der Form $m=1$, $m'=1$) angehörenden Werthe des z sind aber bei (38.) gefunden worden. Nennt man nun einen derselben z_1, so ist der entsprechende Werth in dem Integrale $y=wF(\alpha,\alpha+n',\gamma,z)$,

gleich $\frac{z_1}{z_1-1}$. Diese Werthe, welche dem Integrale $y=wF(\alpha,\alpha+n',\gamma,z)$ angehören, sind daher:

$$39. \quad \begin{cases} 1)\ z=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2, & 2)\ z=\frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}, & 3)\ z=\frac{4-4x}{(2-x)^2}, \\ 4)\ z=\frac{4x}{(1+x)^2}, & 5)\ z=\frac{1}{(1-2x)^2}, & 6)\ z=\left(\frac{x}{2-x}\right)^2. \end{cases}$$

Die Gesammtzahl aller Werthe des z, welche Statt haben können, damit der Differenzialgleichung (2.) ein Integral $y=wF(\alpha,\beta,\gamma,z)$ genüge, indem unter den Quantitäten α, β, γ eine Bedingungsgleichung von der Form $n\alpha+n'\beta+n''\gamma+n'''=0$ Statt habe, ist also 72, und unter diesen sind 27, welche sich von 27 anderen nur durch die Vorzeichen vor den Wurzelgröfsen unterscheiden. Von diesen 72 Werthen des z gewährt wieder ein jeder vier Integrale der Gleichung (2.); die Anzahl aller dieser particulären Integrale der Gleichung (2.) ist daher 288. Die 72 Werthe des z haben ferner viele merkwürdige Beziehungen zu einander, von welchen hier nur folgende erwähnt werden mag, die aus dem vierten und fünften Satze des §. 7. hervorgeht, nemlich dafs, wenn ein beliebiger dieser Werthe durch z_1 bezeichnet wird, auch die Werthe $1-z_1$, $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{1-z_1}$, $\frac{z_1}{z_1-1}$ und $\frac{z_1-1}{z}$ in den 72 Werthen des z enthalten sein müssen. Es können daher von diesen Werthen zwölf als die ursprünglichen betrachtet werden, aus denen die übrigen sich auf die bemerkte Weise ableiten lassen.

§. 18.

Von allen den gefundenen Werthen des z wollen wir jetzt nur zwei auswählen und für diese die zugehörigen Werthe der Quantitäten α', β', γ', und die particulären Integrale der Differenzialgleichung (2.) vollständig bestimmen. Diese werden dann zwei einfache Gleichungen zwischen zwei hypergeometrischen Reihen gewähren, aus welchen alle übrigen Gleichungen, welche unter den 288 Integralen Statt haben können, sich ableiten lassen werden.

Zunächst werde untersucht der Werth (31, 7.):

$$z=\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}.$$

Durch differenzüren giebt dieser:

$$\frac{dz}{z\,dx}=\frac{1}{x\sqrt{(1-x)}}; \qquad \frac{d^2z}{dz\,dx}=\frac{3x-2+2\sqrt{(1-x)}}{2x(1-x)},$$

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^3}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right)^2 = \frac{3}{4(1-x)^2},$$

und diese Werthe in der Gleichung (5.) substituirt, geben:

$$\frac{3}{4(1-x)^2}-\frac{A(1-\sqrt{(1-x)})^2+Bx+C(1+\sqrt{(1-x)})^2}{4x^2(1-x)^2}+\frac{A'x^2+B'x+C'}{x^2(1-x)^2}=0,$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$(3+4A')x^2+(A-B+C+4B')x-2(A+C-2C')+2(A-C)\sqrt{(1-x)}=0.$$

Damit nun diese Gleichung für jeden Werth des x identisch sei, oder damit $z=\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}$ ein richtiges Integral der Gleichung (5.) sei, müssen folgende vier Gleichungen Statt haben:

$$3+4A'=0,\quad A-B+C+4B'=0,\quad A+C-2C'=0,\quad A-C=0,$$

oder

$$A'=-\tfrac{3}{4},\qquad B'=\frac{B-2A}{4},\qquad C'=C,\qquad A=C.$$

Setzt man nun für A, B, C, A', B', C' ihre bei (4.) §. 4. angegebenen Werthe, so werden diese Gleichungen:

$$(\alpha'-\beta')^2=\tfrac{1}{4},\quad 8\alpha'\beta'-4\gamma'(\alpha'+\beta'-1)=2\alpha\beta-\gamma(\alpha+\beta-1)-(\alpha-\beta)^2-1,$$
$$\gamma'(\gamma'-2)=\gamma(\gamma-2),\qquad (\alpha-\beta)^2=(\gamma-1)^2.$$

Diesen Gleichungen kann auf vier verschiedene Arten genügt werden. Wir wollen aber nur folgende Auflösung nehmen:

$$\alpha'=\frac{\alpha}{2},\quad \beta'=\frac{\alpha+1}{2},\quad \gamma'=\alpha-\beta+1,\quad \gamma=\alpha-\beta+1.$$

Substituirt man diese Werthe des α', β', γ' und γ in der Gleichung (4.), welche den Multiplicator giebt, so erhält man

$$w = c(1+\sqrt{(1-x)})^{-\alpha}.$$

Es genügt also $y=c(1+\sqrt{(1-x)})^{-\alpha}F\left(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)$ der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\alpha-\beta+1-(\alpha+\frac{3}{2})x}{x(1-x)}\cdot\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha(\alpha+1)y}{4x(1-x)}=0,$$

deren Integral ebenfalls $y=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha-\beta+1,x\right)$ ist. Da nun die beiden Integrale dieser Differenzialgleichung sich nach ganzen steigenden Potenzen von x entwickeln lassen, so können sie nur durch einen constanten Factor sich unterscheiden (man sehe §. 9.), und diesen findet man sogleich durch den Fall $x=0$, nämlich $c=2^\alpha$. Man hat daher die Gleichung

$$40.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha-\beta+1,x\right)=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right).$$

Eben so wollen wir nun noch eine Gleichung herleiten, welche der Werth des z (31, 9.) gewährt, nämlich:

$$z = \left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)^2$$

Durch differenziiren erhält man hieraus:

$$\frac{dz}{z\,dx} = \frac{2}{x\sqrt{(1-x)}},\qquad \frac{d^2z}{dz\,dx} = \frac{3x-2+4\sqrt{(1-x)}}{2x(1-x)},$$

$$2\frac{d^3z}{dz\,dx^2}-3\left(\frac{d^2z}{dz\,dx}\right) = \frac{3x^2+12x-12}{4x^2(1-x)^2}$$

Dies in der Gleichung (5.) substituirt, giebt:

$$\frac{3x^2+12x-12}{4x^2(1-x)^2}-\frac{A(1-\sqrt{(1-x)})^4+Bx^2+C(1+\sqrt{(1-x)})^4}{4x^2(1-x)^2}+\frac{A'x^2+B'x+C'}{x^2(1-x)^2}=0$$

Damit diese Gleichung für jeden Werth des x statt habe, müssen folgende vier Gleichungen erfüllt werden:

$$3+4A' = A+B+C,\qquad 3+2A+2C+B = 0,$$
$$3+2A+2C-C = 0,\qquad A-C = 0.$$

Setzt man nun für A, B, C, A', B' und C' ihre Werthe durch α, β, γ, α', β' und γ' ausgedrückt, so findet man leicht, dafs diesen vier Gleichungen folgende Werthe von α', β', γ', und γ genügen:

$$\alpha' = \alpha,\qquad \beta' = \alpha-\beta+\tfrac{1}{2},\qquad \gamma' = 2\alpha+2\beta+1,\qquad \gamma = \alpha-\beta+1;$$

Substituirt man diese Werthe nebst denen von z und $\frac{dz}{dx}$ in der Gleichung (4.), so erhält man den Multiplicator

$$w = c(1+\sqrt{(1-x)})^{-2\alpha}.$$

Hieraus folgt, dafs das Integral

$$y = c(1+\sqrt{(1-x)})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,\left(\frac{(1-\sqrt{(1-x)})}{(1+\sqrt{(1-x)})}\right)^2\right)$$

der Differenzialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2\alpha-2\beta+1-(2\alpha-\beta+\frac{3}{2})x}{x(1-x)}\frac{dy}{dx}-\frac{\alpha(\alpha-\beta+\frac{1}{2})y}{x(1-x)}=0$$

genügt. Da dieser Gleichung aber auch das Integral

$$y = F(\alpha,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2},2\alpha-2\beta+1,x)$$

genügt, und diese beiden Integrale sich nach ganzen steigenden Potenzen von x entwickeln lassen, so können sie sich nur durch den constanten Factor unterscheiden. Wird dieser durch den Fall $x=0$ bestimmt, so hat man folgende Gleichung:

$$\textbf{41.}\quad F(\alpha,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2},2\alpha-2\beta+1,x)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,\left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)^2\right).$$

§. 19.

Aus den beiden Gleichungen (40.) und (41.), verbunden mit den allgemeinen Formeln, welche im vorigen Abschnitte gefunden worden sind, werden wir nun alle Gleichungen herleiten können, welche unter je zweien oder je dreien der 288 Integrale der Differenzialgleichung (2.) Statt haben, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen welche in dem Falle Statt haben, wo von den Quantitäten α, β und γ nur noch zwei beliebig sind. Zunächst mögen folgende acht aufgestellt werden:

42. $F(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\gamma,x) = \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, 2\alpha-\gamma+1, \gamma, \frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)$,

43. $F(\alpha,\beta,2\beta,x) = \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, 2\alpha-2\beta+1, \left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)^2\right)$,

44. $F(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\gamma,x) = (1\pm\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \gamma-\frac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{\pm 2\sqrt{x}}{1\pm\sqrt{x}}\right)$,

45. $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},x) = \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \alpha-\beta+\frac{1}{2}, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{(1-x)}-1}{\sqrt{(1-x)}+1}\right)$,

46. $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},x) = (\sqrt{(x-1)}\pm\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \alpha+\beta, 2\alpha+2\beta, \frac{\pm 2\sqrt{x}}{\sqrt{(x-1)}\pm\sqrt{x}}\right)$,

47. $F(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\gamma,x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(2\alpha, 2\gamma-2\alpha-1, \gamma, \frac{\sqrt{(1-x)}-1}{2\sqrt{(1-x)}}\right)$,

48. $F(\alpha,\beta,2\beta,x) = (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}} F\left(\alpha, 2\beta-\alpha, \beta+\frac{1}{2}, -\frac{(1-\sqrt{(1-x)})^2}{4\sqrt{(1-x)}}\right)$,

49. $F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+\frac{1}{2},x) = F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{(1-x)}}{2}\right)$.

Die Gleichung (42.) ist mit (40.) identisch, und ist nur dadurch in diese Form gebracht, daſs 2α statt α, und $2\alpha-\gamma+1$ statt β gesetzt ist. Eben so ist (43.) aus (41.) abgeleitet, indem $\alpha-\beta+\frac{1}{2}$ statt β gesetzt ist. Die Formel (44.) erhält man auf folgende Weise aus (42.) und (43.). Man setze in (43.) 2α statt α, $\gamma-\frac{1}{2}$ statt β, und $\frac{\pm 2\sqrt{x}}{1\pm\sqrt{x}}$ statt x, so verwandelt sich

$$\left(\frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right)^2 \text{ in } \frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}, \quad \text{und} \quad \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^2 \text{ in } \frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2(1\pm\sqrt{x})},$$

weshalb (43.) übergeht in:

$$(1\pm\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(2\alpha, \gamma-\tfrac{1}{2}, 2\gamma-1, \frac{\pm 2\sqrt{x}}{1\pm\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha} F\left(2\alpha, 2\alpha-\gamma+1, \gamma, \frac{1-\sqrt{(1-x)}}{1+\sqrt{(1-x)}}\right),$$

aus welcher Gleichung, verbunden mit (42.), unmittelbar (44.) folgt. Verwandelt man ferner, in (42.) und (44.), x in $\frac{x}{x-1}$, γ in $\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, und

formt die Reihe $F\left(\alpha, \alpha+\frac{1}{2}, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{x}{x-1}\right)$ nach Formel (18.) §. 9. um, so erhält man (45.) und (46.). Verwandelt man endlich, in (42.), (43.) (45.), die Reihen F rechts vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.) §. 9., so erhält man (47.), (48.) und (49.).

Man kann dieselben acht Gleichungen auch in folgender Form darstellen:

$$50.\quad F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) = (1+x)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \alpha-\beta+1, \frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

$$51.\quad F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) = (1\pm\sqrt{x})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \alpha-\beta+\tfrac{1}{2}, 2\alpha-2\beta+1, \frac{\pm 4\sqrt{x}}{(1\pm\sqrt{x})^2}\right),$$

$$52.\quad F(\alpha, \beta, 2\beta, x) = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right),$$

$$53.\quad F(\alpha, \beta, \alpha-\beta+1, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha-2\beta+1}{2}, \alpha-\beta+1, \frac{-4x}{(1-x)^2}\right),$$

$$54.\quad F(\alpha, \beta, 2\beta, x) = (1-x)^{-\frac{\alpha}{2}} F\left(\frac{\alpha}{2}, \beta-\frac{\alpha}{2}, \beta+\tfrac{1}{2}, \frac{x^2}{4(x-1)}\right),$$

$$55.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) = (1-2x)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}\right),$$

$$56.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) = (\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{-2\alpha} F\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta, \frac{\pm 4\sqrt{(x^2-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^2}\right),$$

$$57.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, x\right) = F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, 4x(1-x)\right).$$

Diese acht Gleichungen sind wesentlich dieselben, wie die vorigen acht. So z. B. ist (50.) mit (42.) identisch, wenn in dieser $\frac{\alpha}{2}$ statt α, $\alpha-\beta+1$ statt γ und $\frac{4x}{(1+x)^2}$ statt x gesetzt wird; und auf ähnliche Weise die übrigen.

Alle diese 16 Gleichungen enthalten 20 von den in §. 17. gefundenen Werthen des letzten Elementes z, und zwar grade alle diejenigen, welche zugleich mit x verschwinden; die übrigen Werthe des z geben keine Gleichungen unter zwei, sondern unter drei Functionen F. Mit Hülfe der Formel (17.) §. 9. können aus jeder dieser 16 Gleichungen noch drei andere hergeleitet werden, welche dieselben Werthe des letzten Elementes haben. Durch diese Formel kann man nämlich sowohl die eine als auch die andere Function F in jeder dieser Gleichungen, oder auch beide zugleich umformen; von den so erhaltenen Formeln werden jedoch viele unter einander identisch sein. Da die acht Gleichungen (42.) bis (49.) mit den Gleichungen (50.) bis (57.) identisch sind, so mag diese Umfor-

mung nur an den letzteren ausgeführt werden. Diese gewähren noch folgende neun Gleichungen, welche weder unter einander noch mit den vorigen identisch sind:

58. $F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,x)$
$$=(1-x)^{1-2\beta}(1+x)^{2\beta-\alpha-1}F\left(\frac{\alpha-2\beta+1}{2},\frac{\alpha-2\beta+2}{2},\alpha-\beta+1,\frac{4x}{(1+x)^2}\right),$$

59. $F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,x)$
$$=(1-x)^{1-2\beta}(1\pm\sqrt{x})^{4\beta-2\alpha-2}F\left(\alpha-2\beta+1,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2},2\alpha-2\beta+1,\frac{\pm4\sqrt{x}}{(1\pm\sqrt{x})^2}\right),$$

60. $F(\alpha,\beta,2\beta,x)$
$$=(1-x)^{\beta-\alpha}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\alpha-2\beta}F\left(\beta-\frac{\alpha}{2},\frac{2\beta-\alpha+1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right),$$

61. $F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,x)$
$$=(1+x)(1-x)^{-\alpha-1}F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha}{2}-\beta+1,\alpha-\beta+1,\frac{-4x}{(1-x)^2}\right),$$

62. $F(\alpha,\beta,2\beta,x)$
$$=\left(1-\frac{x}{2}\right)(1-x)^{\frac{-\alpha-1}{2}}F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\beta-\alpha+1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\frac{x^2}{4(x-1)}\right),$$

63. $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},x\right)$
$$=(1-2x)F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},4x(1-x)\right),$$

64. $F(\alpha,1-\alpha,\gamma,x)$
$$=(1-x)^{\gamma-1}(1-2x)^{1-\alpha-\gamma}F\left(\frac{\gamma+\alpha}{2},\frac{\gamma+\alpha+1}{2},\gamma,\frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}\right),$$

65. $F(\alpha,1-\alpha,\gamma,x)$
$$=(1-x)^{\gamma-1}(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{2-2\alpha-2\gamma}F\left(\gamma+\alpha-1,\gamma-\tfrac{1}{2},2\gamma-1,\frac{\pm4\sqrt{(x^2-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^2}\right),$$

66. $F(\alpha,1-\alpha,\gamma,x)$
$$=(1-x)^{\gamma-1}F\left(\frac{\gamma-\alpha}{2},\frac{\gamma+\alpha-1}{2},\gamma,4x(1-x)\right).$$

Wir werden später Gelegenheit haben, von den in diesem Paragraph gefundenen Formeln zahlreiche Anwendungen zu machen; hier mögen nur noch einige allgemeine Eigenschaften derselben erwähnt werden. In keiner dieser Formeln darf der Werth der Quantität x über die Grenzen -1 und $+1$ ausgedehnt werden, und auch innerhalb dieser Grenzen dürfen dem x nur solche Werthe gegeben werden, für welche der Werth des letzten Elementes rechts vom Gleichheitszeichen in den Grenzen -1 und $+1$ liegt. Besonders zu beachten sind die Formeln

(57.), (63.) und (66.) wegen der Grenzen des x, für welche dieselben gültig sind; das letzte Element $4x(1-x)$ erreicht die Grenze -1 für $x=\frac{1-\sqrt{x}}{2}$ und die Grenze $+1$ für $x=\frac{1}{2}$; über diese Grenzen hinaus dürfen diese Formeln nicht angewendet werden, obgleich für die Werthe des x von $\frac{1}{2}$ bis 1 das letzte Element $4x(1-x)$ wieder kleiner als 1 wird, und von 1 bis 0 abnimmt. Übrigens lassen sich alle diese Gleichungen dadurch *a posteriori* beweisen, daſs man die Theile rechts vom Gleichheitszeichen nach steigenden Potenzen von x entwickelt.

§. 20.

Es sind nun noch die Gleichungen zu bilden, welche unter drei Functionen F in dem Falle Statt haben, wo von den Gröſsen α, β, γ nur noch zwei beliebig sind. Man nehme zu diesem Zwecke die Gleichung (21.) des vorigen Abschnittes, in welcher x in z verwandelt werde:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z)=Az^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,z)+BF(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1,1-z).$$

Für z nehme man nun irgend einen der zwanzig Werthe, welche in den Gleichungen des §. 19. enthalten sind, und setze unter den Quantitäten α, β, γ eine Gleichung von der Art, daſs mit Hülfe dieser Formeln des vorigen Paragraph's $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sich in $wF(\alpha',\beta',\gamma',x)$ verwandeln läſst. Wird diese Verwandlung ausgeführt, so hat man eine Gleichung, welche drei Functionen F verbindet, deren letzte Elemente x, z und $1-z$ sind; eben so verfahre man mit den anderen allgemeinen Formeln des §. 11., nämlich (22.) bis (26.), und mit allen, welche, wie wir daselbst gezeigt haben, sich noch aus diesen ableiten lassen. Man erhält so Gleichungen unter je drei Functionen F, deren letzte Elemente die Werthe x, z, $1-z$, $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{1-z}$, $\frac{z}{z-1}$, $\frac{z-1}{z}$ enthalten, indem z einen der 20 Werthe des letzten Elementes bezeichnet, welche in den Gleichungen des vorigen Paragraphen vorkommen. Diese Gleichungen werden nun, wie man leicht übersehen kann, alle im §. 17. gefundenen 72 Werthe des z umfassen, auſser folgenden 12:

$$z=\frac{x\pm\sqrt{x}}{x\mp\sqrt{x}},\qquad z=\frac{\pm2\sqrt{x}}{x\pm\sqrt{x}},\qquad z=\frac{x\pm\sqrt{x}}{\pm2\sqrt{x}},$$

$$z=\frac{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{-x\mp\sqrt{(x^2-x)}},\qquad z=\frac{\pm2\sqrt{(x^2-x)}}{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}},\qquad z=\frac{-x\pm\sqrt{(x^2-x)}}{\pm2\sqrt{(x^2-x)}}.$$

Alle Gleichungen unter drei Functionen F aber, in welchen diese Werthe des letzten Elementes vorkommen, werden keine wesentlich neuen Glei-

chungen, sondern in den auf die oben angegebene Weise gefundenen schon enthalten sein; welches sich zeigt, indem für x eine neue veränderliche eingeführt wird. So z. B. die Gleichungen, in denen Functionen F vorkommen, deren letzte Elemente x und $\frac{x\pm\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$ sind, werden, indem statt x gesetzt wird $(1-2x)^2$, in andere verwandelt, deren letzte Elemente x oder $1-x$ und $(1-2x)^2$ sind, und welche also schon in den nach der obigen Methode gefundenen enthalten sein müssen. Eben so ist es mit den übrigen. Die Anzahl aller der Gleichungen unter drei Functionen F, welche Statt haben, indem noch zwei der Quantitäten α, β, γ beliebig bleiben, ist außerordentlich groß. Es mag daher hier hinreichen, einige der einfachsten und merkwürdigsten herzuleiten.

Setzt man in (23.) §. 11. $\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$, so ist:

$$67.\quad\left\{\begin{aligned}&F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},x\right)\\&=aF\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},1-x\right)+b(1-x)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{3-\alpha-\beta}{2},1-x\right),\\&\text{wo}\quad a=\frac{\cos(\alpha-\beta)\frac{\pi}{2}}{\cos(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}},\qquad b=\frac{\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-3}{2}\right)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}.\end{aligned}\right.$$

Es ist nun nach Formel (57.) §. 19., wenn daselbst x in $1-x$ verwandelt wird:

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},1-x\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},4x(1-x)\right)$$

in den Grenzen $x=\frac{1}{2}$ bis $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

(Jene Formel (57.) gilt nämlich, wie bemerkt worden, in den Grenzen $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$ bis $x=\frac{1}{2}$; also diese, in welcher x in $1-x$ verwandelt worden, in den angegebenen Grenzen $x=\frac{1}{2}$ bis $x=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$.) Dieser Werth von $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},1-x\right)$ substituirt, giebt:

$$68\qquad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},x\right)$$
$$=aF\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},4x(1-x)\right)+b(1-x)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{3-\alpha-\beta}{2},1-x\right)$$

in den Grenzen $x=\frac{1}{2}$ bis $x=1$.

Diese Formel bildet gleichsam die Ergänzung der Formel (57.) §. 19. Formet man die zweite Function F dieser Formel nach (18.) §. 9. um, so wird

$$69.\quad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},x\right)=a(1-2x)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{4x^2-4x}{4x^2-4x+1}\right)$$
$$+b(1-x)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F\left(\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\beta-\alpha+1}{2},\frac{3-\alpha-\beta}{2},1-x\right)$$

in den Grenzen $x=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ bis $x=1$.

Diese Formel ist eben so die Ergänzung von (55.) §. 19., welche nur in den Grenzen $x=-1$ bis $x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$ gültig ist.

Setzt man in Formel (23.) §. 11. $\frac{\alpha}{2}$ statt α, $\frac{\beta}{2}$ statt β, $\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$, und $4x(1-x)$ statt x, so erhält man:

$$70.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},4x(1-x)\right)=cF\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},(1-2x)^2\right)$$
$$-d(1-2x)F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},(1-2x)^2\right),$$

wo

$$71.\quad c=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)},\qquad d=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Hieraus folgt nach Gleichung (57.) §. 19.:

$$72.\quad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},x\right)=c.F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},(1-2x)^2\right)$$
$$-d(1-2x)F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},(1-2x)^2\right).$$

Setzt man nun $\frac{1-\sqrt{x}}{2}$ statt x, so ist

$$73.\quad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)=cF\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},x\right)$$
$$-d\sqrt{x}\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},x\right),$$

und wenn das Vorzeichen vor $\sqrt{x}$ geändert wird,

$$74.\quad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)=cF\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},x\right)$$
$$+d\sqrt{x}\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},x\right).$$

Hieraus erhält man nun durch Addition und Subtraction:

$$75. \quad 2cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, x\right) = F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) + F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right),$$

$$76. \quad 2d\sqrt{x}F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, x\right) = F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) - F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right).$$

Andere Gleichungen dieser Art, welche man nach dem jedesmaligen Bedürfnisse aus den gegebenen Grundgleichungen herleiten kann, übergehe ich; eben so auch die minder einfache Art von Gleichungen, welche für den Fall, dafs α, β, γ ganz unabhängig von einander waren, im §. 13. hergeleitet worden sind.

(Der Schlufs folgt im nächsten Heft.)

4.

Résolution d'un problême relatif au calcul des variations.

(Par Mr. *Pagani*, prof. ord. à l'université de Liège.)

Introduction.

En adoptant l'hypothèse de *Laplace* sur la nature de l'action moléculaire, et en considérant les liquides comme des amas de molécules sphériques homogènes, parfaitement dures et parfaitement lisses, Mr. *Gaufs* *) a ramené la théorie des phénomènes capillaires à un simple problême de minimum. Sans examiner jusqu'à quel point la *nouvelle théorie de l'action capillaire*, publiée presqu'en même temps par Mr. *Poisson*, soit préférable à l'ancienne, je me propose seulement de résoudre la question du minimum dont je viens de parler, en la déduisant des règles générales du calcul des variations. Ce problême étant de nature à jeter quelque jour sur l'emploi de la méthode de *Lagrange*, je donnerai préalablement une démonstration générale de cette méthode. Mais pour faciliter les transformations des formules, je commencerai par exposer un système de notations relatives aux projections algébriques, extrait d'un petit Mémoire que j'ai publié en 1832 dans le Recueil de l'Académie des sciences de Bruxelles.

§. 1.

Propriétés générales des projections algébriques.

1. **Définitions.** Soient x, y, z, les coordonnées rectangulaires d'un point m. En donnant à ces lettres divers accens ou indices, on exprimera les coordonnées d'un système de points rapportés aux mêmes axes. Mais pour désigner les coordonnées du point m, rapporté à trois nouveaux axes rectangulaires ayant même origine que les premiers, on se servira des lettres ξ, η, ζ; la lettre ξ étant corrélative à x, et ainsi des deux autres.

---

*) V. Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii.

$F(\alpha, \beta)$ étant une fonction quelconque des variables α, β, on écrira, d'une manière abrégée

$Fx+$, au lieu de $Fx+Fy+Fz$;
$F(x, \xi)+$, - - - $F(x, \xi)+F(y, \xi)+F(z, \xi)$;
$F(x, y)+$, - - - $F(x, y)+F(y, z)+F(z, x)$.

De même l'équation symbolique

$$Fx = 0, \ +$$

tiendra lieu des équations

$$Fx = 0, \quad Fy = 0, \quad Fz = 0:$$

l'équation

$$Fx = a, b, c$$

sera l'équivalent des équations

$$Fx = a, \quad Fy = b, \quad Fz = c,$$

l'équation

$$F(x, \xi) = 0, \ +$$

sera la meme chose que

$$F(x, \xi) = 0, \quad F(y, \xi) = 0, \quad F(z, \xi) = 0;$$

et l'equation

$$F(x, y) = 0, \ +,$$

la même chose que

$$F(x, y) = 0, \quad F(y, z) = 0, \quad F(z, x) = 0.$$

Mais si l'on écrit l'equation symbolique comme il suit

$$F(x, \xi) = 0, \atop +,$$

elle exprimera le systeme des équations

$$F(x, \xi) = 0, \quad F(x, \eta) = 0, \quad F(x, \zeta) = 0.$$

Il résulte de là que l'équation symbolique

$$F(x, \xi)+ = f(x, \xi)+, \atop +,$$

doit indiquer les trois équations suivantes

$$F(x, \xi)+F(y, \xi)+F(z, \xi) = f(x, \xi)+f(y, \xi)+f(z, \xi),$$
$$F(x, \eta)+F(y, \eta)+F(z, \eta) = f(x, \eta)+f(y, \eta)+f(z, \eta),$$
$$F(x, \zeta)+F(y, \zeta)+F(z, \zeta) = f(x, \zeta)+f(y, \zeta)+f(z, \zeta).$$

2. Remarque. Au moyen des notations précédentes, une seule expression suivie du signe $+$, peut indiquer trois expressions corrélatives, dont les deux dernières se déduisent de l'autre per la permutation des lettres

$$\begin{array}{llllll} x & \text{en} & y, & \xi & \text{en} & \eta, \\ y & .. & z, & \eta & .. & \zeta, \\ z & .. & x, & \zeta & .. & \xi, \end{array}$$

Il est important d'observer que, dans les expressions qui contiennent des lettres relatives à deux systèmes d'axes, on ne doit permuter à chaque fois que les lettres relatives à un système. Si le signe $+$ est à droite, les lettres que l'on doit permuter doivent être à la gauche des autres; si le signe $+$ est au-dessous, c'est l'inverse.

3. Ayant mené par l'origine des coordonnées, une droite quelconque r, on désignera par (rx) le cosinus de l'angle que fait cette droite avec la direction de l'axe des x positifs; le produit $r(rx)$, ou plus simplement $r(x)$, exprimera la *projection algébrique* de la droite r, sur l'axe des x. Il est évident que l'on aura

$$r^2 = r^2(xr)^2 +;$$

et, en divisant par r^2,

$$1. \qquad (xr)^2 + = 1.$$

4. **Théorème 1er.** Les trois coordonnées x, $+$, du point m représentent les projections algébriques de la distance r de ce point à l'origine des coordonnées; et les cosinus des angles formés par cette droite avec les axes, ont pour expression $\frac{x}{r}$, $+$.

La démonstration de ce théorème résulte des premiers principes de la stéréométrie.

5. **Théorème 2me.** L'angle formé par deux droites r, r', menées par l'origine, est donné par la formule

$$2. \qquad (rr') = (xr)(xr') +.$$

Démonstration. La droite u, qui joint les extrémités des droites r, r', fait avec ces dernières un triangle, du quel on déduit

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(rr').$$

D'un autre côté la droite u est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont les trois arêtes sont $\pm[r'(x) - r(x)]$, $+$.

On aura donc aussi

$$u^2 = [r'(x) - r(x)]^2 +,$$

ou bien, en développant et en ayant égard à la relation (1.),

$$u^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'[(xr)(xr') +].$$

En comparant cette valeur de u^2 à la première, on en déduira la formule (2.). Donc etc.

6. Corollaire 1er. En faisant coïncider successivement la droite r' avec les axes des ξ, $+$, on aura par la formule (2.)

$$3. \qquad (r\xi) = (xr)(x\xi) +, \quad +.$$

7. Corollaire 2me. En permutant les lettres relatives aux deux systèmes des coordonnées, la formule (3.) donnera

$$4. \qquad (rx) = (\xi r)(\xi x) +, \quad +.$$

8. Corollaire 3me. Si la droite r coïncide successivement avec les axes des ξ, $+$; les formules (3.) donneront

$$5. \qquad (x\xi)^2 + = 1, \quad +; \qquad (x\xi)(x\eta) + = 0; \quad +;$$

si r coïncide successivement avec les axes des x, $+$; on obtiendra par les formules (4.),

$$6. \qquad (\xi x)^2 + = 1, \quad +; \qquad (\xi x)(\xi \eta) + = 0, \quad +.$$

9. Corollaire 4me. En resolvant les équations (4.) par rapport à (ξr), $+$, et en comparant les résultats aux formules (3.), on en déduira les neuf relations suivantes

$$7. \qquad (x\xi) = (y\eta)(z\zeta) - (y\zeta)(z\eta), +, \quad +.$$

10. Théorème 3me. x, $+$, et ξ, $+$, étant les coordonnées d'un point quelconque m rapporté à deux systemes d'axes rectangulaires dont l'origine est commune, on a

$$8. \qquad \xi = x(\xi) +, \quad +;$$

ou bien

$$9. \qquad x = \xi(x) +, \quad +.$$

Démonstration. Les coordonnées d'un point quelconque sont les projections algébriques de sa distance à l'origine. En multipliant les formules (3.) et (4.) par cette distance on en déduit immédiatement les formules (8.) et (9.).

11. Corollaire 1er. Si le point m est sur le plan des η, ζ; en faisant $\xi = 0$ dans les deux dernières formules (9.), on obtient d'abord

$$y = \eta(y) + \zeta(y), \qquad z = \eta(z) + \zeta(z),$$

d'où tirant la valeur de ζ, et en ayant égard à la relation (7.), on a

$$\zeta(\xi x) = (\eta y)z - (\eta z)y,$$
$$+.$$

12. Corollaire 2me. Si l'on multiplie ces dernières formules par une droite η', parallèle à l'axe des η, on aura ces formules remarquables

$$\eta'\zeta(\xi x) = \eta'(y)z - \eta'(z)y,$$
$$+,$$

que l'on pourrait facilement traduire en théorèmes de géométrie, et qui servent à établir la théorie des momens et des couples en mécanique.

13. Théorème 4me. Soit A une aire plane; a la perpendiculaire élevée sur son plan; on aura

$$A(a\xi) = A(xa)(x\xi) +,$$
$$+;$$

ou bien

$$A(ax) = A(\xi a)(\xi x) +,$$
$$+.$$

Demonstration. En changeant dans les formules (3.) et (4.), la lettre r en a, et en les multipliant par A on obtient les formules rapportées.

14. Corollaire 1er. Posons pour abréger

$$A(au) + A'(a'u) + A''(a''u) + A'''(a'''u) \ldots . = SA(au);$$

et nous aurons pareillement

$$SA(a\xi) = [(x\xi)\,SA(xa)] +, \quad \text{et} \quad SA(ax) = [(\xi x)SA(\xi a)] +,$$
$$+; \qquad\qquad +.$$

15. Corollaire 2me. Ces formules démontrent que les sommes des projections algébriques de plusieurs aires planes, ont entre elles les mêmes relations que les coordonnées d'un point de l'espace, rapporté à deux systèmes d'axes. On aura donc

$$[SA(\xi a)]^2 + = [SA(xa)]^2 +.$$

16. Corollaire 3me. En choisissant les axes des η et des ζ de manière que l'on ait $SA(\eta a) = 0$, $SA(\zeta a) = 0$; la somme des projections algébriques sur le plan des η, ζ sera un maximum dont la valeur est

$$SA(\xi a) = \sqrt{[(SA(xa))^2 +]}.$$

La position du plan des η, ζ, sera connue au moyen des formules de l'article 14., qui donnent dans ce cas

$$(\xi x) = \frac{SA(ax)}{\sqrt{[(SA(xa))^2 +]}}.$$
$$+.$$

Remarque générale. Ce que nous venons d'indiquer suffit pour montrer l'usage des notations proposées et leur utilité dans les problèmes où il faut exprimer des relations entre les quantités relatives aux systèmes d'axes rectangulaires. Mais c'est surtout dans la mécanique que l'emploi de ces notations est avantageux à cause de la simplicité qu'il permet d'introduire dans les formules les plus compliquées. Dans le Mémoire cité au commencement de cet écrit, nous en avons fait l'application au mouvement de rotation d'un corps solide. On en verra plus loin une nouvelle application.

§. II.

Exposition de la méthode des variations.

18. Désignons par

10. $U = F(x, y, z, \ldots u, u', u_{,}, {}_{,}u, \ldots u'', u_{,,}, {}_{,,}u, \ldots u_{,}', {}_{,}u', \ldots \text{etc.})$,

une fonction donnée des variables indépendantes x, y, z, ..., et des quantités u, u', etc. considérées comme des fonctions des mêmes variables. Les accens et indices qui accompagnent la lettre u servent à exprimer, d'une manière abrégée, les coëfficiens aux differentielles partielles de la fonction u, de telle sorte que l'on a, par exemple,

$$ {}_{p}u_{n}^{m} = \frac{d^{m+n+p}u}{dx^{m}\, dy^{n}\, dz^{p}}. $$

19. Ayant l'intégrale multiple définie

$$ V = SU dx\, dy\, dz \ldots; $$

il est clair qu'en y substituant à la place de u une nouvelle fonction v dont les valeurs diffèrent infiniment peu de celles de la première, pour les mêmes valeurs de chaque variable indépendante, et pour toutes les valeurs infiniment voisines de celles-là, l'intégrale multiple aura une nouvelle valeur W qui sera infiniment peu différente de V. Mais on aura la variation la plus générale de V en substituant, en outre, d'autres variables indépendantes ξ, η, ζ, ... dont les valeurs diffèrent infiniment peu des celles des variables corrélatives x, y, z, ... Dans ce cas, on pourra supposer que les limites des nouvelles variables sont les mêmes que celles des variables primitives.

Donc, si l'on fait

11. $\Upsilon = F(\xi, \eta, \zeta, \ldots v, v', v_{,}, {}_{,}v, \ldots v'', \text{etc.})$,

on aura

12. $W - V = \delta V = S[\Upsilon d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots - U dx\, dy\, dz \ldots]$.

20. Pour developper le second membre de la dernière équation, nous écrirons d'abord

$$13. \quad \xi = x + \delta x, \quad \eta = y + \delta y, \quad \zeta = z + \delta z, \quad \ldots,$$

et nous regarderons, conformement à l'hypothèse de l'article 19., les variations δx, δy, δz, ..., comme des fonctions arbitraires et infiniment petites des variables indépendantes x, y, z, ... De même, si l'on admet que l'on ait

$$u = f(x, y, z, \ldots.),$$

il faudra prendre

$$14. \quad v = f(\xi, \eta, \zeta, \ldots.) + w,$$

en désignant par w une fonction arbitraire et infiniment petite des variables indépendantes ξ, η, ζ,....

21. Si nous posons, pour abréger,

$$v = u + \delta u, \quad v' = u' + \delta u', \quad v_, = u_, + \delta u_,, \quad \ldots.$$
$$v'' = u'' + \delta u'', \quad \text{etc.};$$

nous aurons aussi $\Upsilon = U + \delta U$, et l'équation (11.) nous fournira

$$15. \quad \delta U = \frac{dU}{dx}\delta x + \frac{dU}{dy}\delta y + \frac{dU}{dz}\delta z \ldots. + \frac{dU}{du}\delta u$$
$$+ \frac{dU}{du'}\delta u' + \frac{dU}{du_,}\delta u_, + \frac{dU}{d_,u}\delta_, u \ldots.$$
$$+ \frac{dU}{du''}\delta u'' + \frac{dU}{du_{,,}}\delta u_{,,} + \frac{dU}{d_{,,}u}\delta_{,,} u \ldots.$$
$$+ \frac{dU}{du_,'}\delta u_,' + \frac{dU}{d_,u'}\delta_, u' \ldots\ldots\ldots$$
$$+ \text{etc.}$$

22. Cela posé, substituons dans l'équation (14.), les valeurs de ξ, etc. données par les formules (13.); nous aurons, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$16. \quad v = u + u'\delta x + u_,\delta y + {}_,u\,\delta z \ldots. + w,$$

en considérant maintenant w comme une fonction infiniment petite des variables primitives x, etc.

En vertu des équations (13.) et (14.), on peut regarder v comme une fonction des variables primitives, ou comme une fonction des nouvelles variables. Dans la première supposition on aura par la différentiation,

$$dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy + \frac{dv}{dz}dz \ldots.$$

et si l'on différentie la même fonction dans la seconde hypothèse, on aura

$$dv = v'd\xi + v_,d\eta + {}_,v\,d\zeta \ldots.$$

Mais les équations (13.) nous donnent

$$17. \begin{cases} d\xi = \left(1+\frac{d.\delta x}{dx}\right)dx + \frac{d.\delta x}{dy}dy + \frac{d.\delta x}{dz}dz \dots \\ d\eta = \left(1+\frac{d.\delta y}{dy}\right)dy + \frac{d.\delta y}{dx}dx + \frac{d.\delta y}{dz}dz \dots \\ d\zeta = \left(1+\frac{d.\delta z}{dz}\right)dz + \frac{d.\delta z}{dx}dx + \frac{d.\delta z}{dy}dy \dots \\ \text{etc.} \end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans la seconde expression de dv, et en comparant le résultat avec la valeur précédente de la même différentielle, on trouvera

$$\frac{dv}{dx} = v'\left(1+\frac{d.\delta x}{dx}\right) + v_{,}\frac{d.\delta y}{dx} + {}_{,}v\frac{d.\delta z}{dx} \dots$$
etc.

D'un autre côté, en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (16.), on a

$$\frac{dv}{dx} = u' + u''\delta x + u_{,}'\delta y + {}_{,}u'\delta z \dots + w'$$
$$+ u'\frac{d.\delta x}{dx} + u_{,}\frac{d.\delta y}{dx} + {}_{,}u\frac{d.\delta z}{dx} \dots$$

La comparaison de ces deux valeurs de $\frac{dv}{dx}$, fournira, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre,

$$v' = u' + u''\delta x + u_{,}'\delta y + {}_{,}u'\delta z \dots + w'.$$

Il est évident que la comparaison des deux valeurs des autres coefficiens différentiels $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dv}{dz}$, etc., nous eut donné

$$v_{,} = u_{,} + u_{,}'\delta x + u_{,,}\delta y + {}_{,}u_{,}\delta z \dots + w_{,},$$
$${}_{,}v = {}_{,}u + {}_{,}u'\delta x + {}_{,}u_{,}\delta y + {}_{,,}u\,\delta z \dots + {}_{,}w,$$
etc.

23. En répétant sur les fonctions dérivées v', $v_{,}$, etc. les raisonnemens de l'article précédent relatifs à la fonction v, on trouvera sans peine

$$v'' = u'' + u'''\delta x + u_{,}''\delta y + {}_{,}u''\delta z \dots + w'',$$
$$v_{,}' = u_{,}' + u_{,}''\delta x + u'_{,,}\delta y + {}_{,}u_{,}'\delta z \dots + w_{,}',$$
etc.;

et généralement

$${}_{p}v_{n}^{m} = {}_{p}u_{n}^{m} + {}_{p}u_{n}^{m+1}\delta x + {}_{p}u_{n+1}^{m}\delta y + {}_{p+1}u_{n}^{m}\delta z \dots + {}_{p}w_{n}^{m}.$$

Au moyen de cette relation générale combinée avec les formules de l'article 21., on pourra éliminer de l'équation (15.), les variations δu,

$\delta u'$, δ,u, etc., et l'on obtiendra une expression nouvelle pour δU que l'on mettera facilement sous cette forme

$$18.\quad \delta U = U'\delta x + U,\delta y + ,U\delta z \ldots + \frac{dU}{du}w + \frac{dU}{du'}w' + \frac{dU}{du,}w, + \frac{dU}{d,u},w \ldots + \frac{dU}{du''}w'' + \frac{dU}{du,,}w,, + \frac{dU}{d,,u},,w \ldots + \frac{dU}{du,'}w,' + \frac{dU}{d,u'},w' \ldots\ldots + \text{etc.}$$

24. Il nous reste encore à transformer le produit $d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots$ Mais pour cela il suffit d'observer que l'on aura la valeur $d\xi$, par exemple, en faisant dans les formules (17.) $d\eta = 0$, $d\zeta = 0$, ... et en éliminant du second membre de la première de ces formules, les différentielles dy, dz, ... En négligeant les infiniment petits du 3me ordre, on aura simplement

$$d\xi = \left(1 + \frac{d.\delta x}{dx}\right)dx.$$

On trouvera pareillement

$$d\eta = \left(1 + \frac{d.\delta y}{dy}\right)dy, \qquad d\zeta = \left(1 + \frac{d.\delta z}{dz}\right)dz, \ldots$$

Partant

$$d\xi\, d\eta\, d\zeta \ldots = \left(1 + \frac{d.\delta x}{dx} + \frac{d.\delta y}{dy} + \frac{d.\delta z}{dz} \ldots\right)dx\, dy\, dz \ldots$$

25. Si nous substituons dans l'équation (12.) la valeur de ce dernier produit ainsi que l'expression de Υ de l'article 21., nous aurons

$$\delta V = S\left[\delta U + U\left(\frac{d.\delta x}{dx} + \frac{d.\delta y}{dy} + \frac{d.\delta z}{dz} \ldots\right)\right]dx\, dy\, dz \ldots;$$

ou bien, en intégrant par parties,

$$\delta V = SU\delta x\, dy\, dz \ldots + SU\delta y\, dx\, dz \ldots + SU\delta z\, dx\, dy \ldots + \text{etc.}$$
$$+ S(\delta U - U'\delta x - U,\delta y - ,U\delta z \ldots)dx\, dy\, dz \ldots$$

Il est nécessaire d'observer que, les termes qui forment la première ligne du second membre de cette équation se rapportant aux limites de l'intégration partielle, il faudra prendre à la place du produit $U\delta x$, par exemple, la somme

$$(U\delta x)_{\varphi_{0,0}} - (U\delta x)_{\varphi_0} + (U\delta x)_{\varphi_{0,0,0,0}} - (U\delta x)_{\varphi_{0,0,0}} \text{ etc.},$$

dans laquelle la caractéristique $\varphi_{0,0,\ldots}$ dénote une fonction donnée de y, z, ... et la notation $(U\delta x)_{\varphi_{0,0,\ldots}}$, indique que dans la fonction Udx

il faut substituer la fonction $\varphi_{0,0,\dots}$ à la variable x. On pourra écrire simplement $(U\delta x)_\varphi$ au lieu de la somme précédente; et si l'on désigne par ψ une fonction donnée de $x, z, \dots$; par χ une fonction de $x, y, \dots$ etc.; la dernière expression de δV, eu égard à la formule (18.), deviendra

$$\delta V = S(U\delta x)_\varphi dy\,dz\dots + S(U\delta y)_\psi dx\,dz\dots + S(U\delta z)_\chi dx\,dy\dots + \text{etc.}$$
$$+ S\Big(\frac{dU}{du}w + \frac{dU}{du'}w' + \frac{dU}{du_,}w_, + \frac{dU}{d_,u}{}_,w\dots$$
$$+ \frac{dU}{du''}w'' + \frac{dU}{du_{,,}}w_{,,} + \frac{dU}{d_{,,}u}{}_{,,}w\dots$$
$$+ \frac{dU}{du_,'}w_,' + \frac{dU}{d_,u'}{}_,w'\dots + \text{etc.}\Big)dx\,dy\,dz\dots$$

26. L'intégration par parties donnera

$$S\frac{dU}{du'}w'dx\,dy\,dz\dots = S\Big(\frac{dU}{du'}w\Big)_\varphi dy\,dz\dots - S\Big(\frac{dU}{du'}\Big)'w\,dx\,dy\,dz\dots$$
$$S\frac{dU}{du_,}w_,dx\,dy\,dz\dots = S\Big(\frac{dU}{du_,}w\Big)_\psi dx\,dz\dots - S\Big(\frac{dU}{du_,}\Big)_,w\,dx\,dy\,dz\dots$$

etc.

$$S\frac{dU}{du''}w''dx\,dy\,dz\dots = S\Big(\frac{dU}{du''}w'\Big)_\varphi dy\,dz\dots - S\Big[\Big(\frac{dU}{du''}\Big)'w\Big]_\varphi dy\,dz\dots$$
$$+ S\Big(\frac{dU}{du''}\Big)''w\,dx\,dy\,dz\dots$$
$$S\frac{dU}{du_{,,}}w_{,,}dx\,dy\,dz\dots = S\Big(\frac{dU}{du_{,,}}w_,\Big)_\psi dx\,dz\dots - S\Big[\Big(\frac{dU}{du_{,,}}\Big)_,w\Big]_\psi dx\,dz\dots$$
$$+ S\Big(\frac{dU}{du_{,,}}\Big)_{,,}w\,dx\,dy\,dz\dots$$

etc.

$$S\frac{dU}{du_,'}w_,'dx\,dy\,dz\dots = S\Big(\frac{dU}{du_,'}w_,\Big)_\varphi dy\,dz\dots - S\Big[\Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)'w\Big]_\psi dx\,dz\dots$$
$$+ S\Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)_,'w\,dx\,dy\,dz\dots$$

etc.

27. Si, au lieu d'intégrer d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y, on eut suivi une marche inverse, on aurait trouvé à la place de la première ligne du second membre de la dernière équation, cell-ci

$$S\Big(\frac{dU}{da_,'}w'\Big)_\psi dx\,dz\dots - S\Big[\Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)_,w\Big]_\varphi dy\,dz\dots$$

Donc, en posant pour abréger, $\frac{dU}{du_,'} = \Pi$, on doit avoir

$$S(\Pi w_, + \Pi_, w)_\varphi dy\,dz\dots = S(\Pi w' + \Pi' w)_\psi dx\,dz\dots$$

Pour s'en convaincre on observera que le premier membre de cette équa-

tion est la même chose que

$$S\frac{d(\Pi w_, + \Pi_, w)}{dx}dx\,dy\,dz\ldots = S(\Pi w_,' + \Pi' w_, + \Pi_, w' + \Pi_,' w)dx\,dy\,dz\ldots$$
$$= S\frac{d(\Pi w' + \Pi' w)}{dy}dy\,dx\,dz\ldots$$
$$= S(\Pi w' + \Pi' w)_\psi\, dx\,dz\ldots$$

On pourra donc prendre conformément à la remarque de Mr. *Poisson*, au lieu de la première ligne du second membre de la dernière équation de la dernière équation de l'article précédent, la moitié de sa valeur plus la moitié de la valeur des deux termes équivalens.

28. Au moyen des transformations de l'article 26., et en ayant égard à la remarque qui précède, si l'on fait pour plus de simplicité,

$$X = \Big[U\delta x + \Big\{\frac{dU}{du'} - \Big(\frac{dU}{du''}\Big)' - \frac{1}{2}\Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)_, - \frac{1}{2}\,{}_,\Big(\frac{dU}{d_,u'}\Big)\ldots\Big\}w$$
$$+ \frac{dU}{du''}w' + \frac{1}{2}\cdot\frac{dU}{du_,'}w_, + \frac{1}{2}\cdot\frac{dU}{d_,u'}\,{}_,w\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_\varphi;$$

$$Y = \Big[U\delta y + \Big\{\frac{dU}{du_,} - \Big(\frac{dU}{du_{,,}}\Big)_, - \frac{1}{2}\Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)' - \frac{1}{2}\,{}_,\Big(\frac{dU}{d_,u_,}\Big)\ldots\Big\}w$$
$$+ \frac{dU}{du_{,,}}w_, + \frac{1}{2}\cdot\frac{dU}{du_,'}w' + \frac{1}{2}\,\frac{dU}{d_,u_,}\,{}_,w\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\Big]_\psi;$$

etc. . . . . ;

$$\Omega = \frac{dU}{du} - \Big(\frac{dU}{du'}\Big)' - \Big(\frac{dU}{du_,}\Big)_, - {}_,\Big(\frac{dU}{d_,u}\Big)\ldots$$
$$+ \Big(\frac{dU}{du''}\Big)'' + \Big(\frac{dU}{du_{,,}}\Big)_{,,} + {}_{,,}\Big(\frac{dU}{d_{,,}u}\Big)\ldots$$
$$+ \Big(\frac{dU}{du_,'}\Big)_,'\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

l'expression générale de la variation de V, mise sous la forme la plus simple, sera

$$\delta V = S(X\,dy\,dz\ldots + Y\,dz\,dx\ldots + Z\,dx\,dy\ldots + \text{etc.})$$
$$+ S\,\Omega\,w\,dx\,dy\,dz\ldots$$

29. Lorsque le nombre des variables indépendantes est au-dessous de quatre, les intégrales qui se rapportent aux limites sont susceptibles d'une réduction ulterieure, ainsi qu'on va le démontrer.

Supposons d'abord que les variables indépendantes soient x, y, z. L'intégrale triple V s'étendra à tous les élémens d'un volume dont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque sont x, y, z. Les intégrales aux limites seront des intégrales doubles qui devront s'étendre à tous les points de la surface ou des surfaces qui terminent le volume. Il est aisé de s'assurer que la normale ν à un point quelconque de l'une de ces surfaces, prolongée en déhors du solide, donnera

$$(\nu x) d\sigma^2 = \pm dy\, dz, +$$

en désignant par $d\sigma^2$ l'élément de la surface. En outre, si l'on admet que les valeurs des variables et des autres quantités qui entrent dans les fonctions X, se rapportent à un point quelconque de la surface du solide, on aura toujours sous le signe S; $dy\, dz = (\nu x) d\sigma^2, +$; ce qui changera l'expression de δV en

$$\delta V = S(X(\nu x) +) d\sigma^2 + S\Omega w\, dx\, dy\, dz;$$

la première intégrale devant s'étendre à toute la surface du solide, et la seconde à tout le volume.

En réduisant les variables indépendantes aux deux x, y, l'intégrale V se rapportera aux élémens d'une surface, et les intégrales aux limites seront relatives aux points des lignes qui terminent la surface. Pour fixer les idées, nous supposerons que les projections de ces lignes sur le plan des x, y, sont deux courbes rentrantes dont l'une contient l'autre, et qu'elles sont renfermées toutes les deux dans l'angle des x, y positifs.

Cela posé, prenons sur l'une de ces lignes un point m dont la projection tombe sur un des points où la courbe rentrante tourne la convexité vers l'axe des x et la concavité vers l'axe des y. Par le point m, menons une tangente η à la ligne qui forme le bord de la surface, de manière que l'angle ηy soit aigu. Soit, en outre, s la longueur variable de cette ligne, dont la valeur augmente dans le sens de la tangente η. Les valeurs des quantités qui entrent dans les fonctions X, Y, se rapportant maintenant au point m, on aura sous le signe S, $dy = \pm(\eta y) ds$, $dx = \mp(\eta x) ds$; le signe supérieur ayant lieu pour tous les points de la courbe extérieure, et le signe inférieur pour tous ceux de la courbe intérieure.

On aura donc, dans ce cas,

$$19. \quad \delta V = \pm S[X(\eta y) - Y(\eta x)] ds + S\Omega w\, dx\, dy.$$

Enfin, si la variable x était la seule variable indépendante, on aurait seulement

$$\delta V = X_1 - X_0 + S\Omega w\,dx,$$

en désignant par X_0 la valeur de X relative au premier point de la courbe à laquelle se rapporte l'intégrale V, et par X_1 la valeur de la même fonction, au dernier point.

§. III.

Application des formules précédentes à un exemple remarquable.

30. Un vase, de forme conoïdale, étant rempli d'eau jusqu'à une certaine hauteur, on obtient l'équation de la surface du liquide en équilibre, en déterminant les conditions du minimum d'une certaine fonction. Pour faciliter l'énoncé de la question, nous supposerons que l'on prenne pour plan des x, y, celui d'une section horizontale du vase à une distance sensible au-dessus de la surface libre du liquide, et pour axe de z, la verticale dirigée de haut en bas. Nommons σ l'aire de la surface libre du liquide, τ l'aire de la surface intérieure du vase, comprise entre le bord ϖ de la surface σ, et la ligne q, intersection de la surface τ avec le plan des x, y. Enfin soit p la projection horizontale de la ligne ϖ.

On aura

$$\sigma = S\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}.\,dx\,dy,$$

la limite de cette intégrale étant la ligne ϖ assujettie à rester constamment sur la surface intérieure du vase;

$$\tau = S\sqrt{(1 + z'^2 + z_{,}^2)}.\,dx\,dy,$$

les limites étant la ligne fixe q et la ligne mobile ϖ.

Si nous posons, en outre,

$$v = S(\tfrac{1}{2}z^2 - cz)\,dx\,dy,$$

l'intégrale étant étendue à la somme des surfaces τ et σ, et la lettre c désignant une constante donnée; il s'agira de rendre un minimum la fonction

$$V = v + h\sigma + k\tau,$$

où h et k dénotent deux constantes déterminées.

31. Pour résoudre cette question il suffit de trouver la variation de V et de l'égaler à zéro. Mais on a

$$20. \qquad \delta V = \delta v + h\delta\sigma + k\delta\tau;$$

par conséquent il faudra d'abord calculer les variations des fonctions v, σ, et τ.

On fera, dans les formules de l'article 28., $z=0$ et $u=z$; ce qui donnera premièrement

$$X = U\delta x + \frac{dU}{dz'}w,$$

$$Y = U\delta y + \frac{dU}{dz_,}w,$$

$$\Omega = \frac{dU}{dz} - \left(\frac{dU}{dz'}\right)' - \left(\frac{dU}{dz_,}\right)_,.$$

32. Soit maintenant $U=\frac{1}{2}z^2-cz$; les formules ci-dessus deviendront

$$X = (\tfrac{1}{2}z^2-cz)\delta x,$$

$$Y = (\tfrac{1}{2}z^2-cz)\delta y,$$

$$\Omega = z-c;$$

et si l'on substitue ces valeurs dans la formule (19.) on aura

$$\delta v = S(\tfrac{1}{2}z^2-cz)[(\eta y)\delta x-(\eta x)\delta y]ds + S(z-c)w\,dx\,dy.$$

La première de ces intégrales étant relative à la ligne φ dont tous les points sont fixes, on aura $\delta x=0$, $\delta y=0$; ce qui réduit l'expression précédente à

$$21. \qquad \delta v = S(z-c)w\,dx\,dy.$$

Si l'on fait $U=\sqrt{(1+z'^2+z_,^2)}$; les formules de l'article 31. donneront

$$X = U\delta x + \frac{z'}{U}w,$$

$$Y = U\delta y + \frac{z_,}{U}w,$$

$$\Omega = -\left(\frac{z'}{U}\right)' - \left(\frac{z_,}{U}\right)_,;$$

et l'on obtiendra par la formule (19.),

$$\delta.SU\,dx\,dy = \pm S\left[\left(U\delta x+\frac{z'w}{U}\right)(\eta y)-\left(U\delta y+\frac{z_,w}{U}\right)(\eta x)\right]ds$$
$$-S\left[\left(\frac{z'}{U}\right)'+\left(\frac{z_,}{U}\right)_,\right]w\,dx\,dy.$$

Le double signe indique qu'il faut étendre d'abord l'intégrale simple à tous les points de la courbe extérieure; l'étendre ensuite à tous les points de la courbe intérieure, et retrancher le second résultat du premier. Mais par rapport à la surface σ, il ne faudra prendre que le signe supérieur, puisque cette surface n'a qu'un seul bord d'après l'hypothèse.

Dans le cas contraire, il faudrait appliquer la règle générale; ce qui au reste n'offre pas une plus grande difficulté. Si l'on applique la formule précédente à la surface τ, il faudra prendre le signe plus, si la courbe p renferme la courbe q, et réciproquement; attendu que la courbe q étant fixe, l'intégrale par rapport à cette limite est nulle d'elle même, comme nous l'avons fait remarquer au commencement de cet article. Il en est de même des termes qui sont sous le signe relatif à l'intégrale double; la surface τ étant fixe, ces termes sont nuls à cause du facteur w qui se réduit à zéro.

33. Cela posé, si par le point m de la ligne ϖ, où correspond la tangente η, on mène, dans le sens des z positifs, la normale ζ à la surface du liquide, et dans le plan tangent à cette surface, du côté des x positifs, une troisième droite ξ, perpendiculaire à η; on aura, comme on sait

$$(\zeta z) = \frac{1}{U}, \qquad (\zeta x) = -\frac{z'}{U}, \qquad (\zeta y) = -\frac{z'}{U};$$

et si l'on observe que

$$w = \delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y,$$

on trouvera sans peine

$$\left(U\delta x + \frac{z'w}{U}\right)(\eta y) - \left(U\delta y + \frac{z_{,}w}{U}\right)(\eta x) = [(\eta y)(\zeta z) - (\eta z)(\zeta y)]\delta x +.$$

Le second membre de cette équation, en vertu de la formule (7.), se réduit simplement à $(x\xi)\delta x +$. Il viendra donc

$$\delta\sigma = S[(x\xi)\delta x +]ds - S\left[\left(\frac{z'}{U}\right)' + \left(\frac{z_{,}}{U}\right)_{,}\right] w\,dx\,dy,$$

et

$$\delta\tau = \pm S[(x\xi_{,})\delta x +]\,ds,$$

$\xi_{,}$ étant par rappot à la surface τ ce que ξ est par rapport à σ.

34. En combinent ces deux formules avec les formules (20.) et (21.), on voit que pour rendre la fonction V minimum, on doit avoir

$$22. \qquad z - \left(\frac{z'}{U}\right)' - \left(\frac{z_{,}}{U}\right)_{,} = c,$$

et

$$[h(x\xi) \pm k(x\xi_{,})]\delta x + = 0.$$

Les variations $\delta x, +$ devant satisfaire à l'équation différentielle de la surface τ, laquelle peut être mise sous cette forme

$$(x\xi_{,})\delta x + = 0,$$

en désignant par ξ, la normale prolongée dans le sens des z positifs; il est clair que l'on aura les trois équations

$$h(x\xi) \pm k(x\xi_{,}) + \lambda(x\zeta_{,}) = 0, \; +,$$

où λ indique un facteur inconnu.

Multiplions ces dernières équations respectivement par $(x\xi_{,})$, +, et en ajoutant les produits nous trouverons

$$h(\xi\xi_{,}) \pm k = 0.$$

Cette formule et l'équation (22.) renferment la solution du problème proposé. On s'assure aisément que l'équation précédente indique que le connus de l'angle formé par l'élément de la surface libre du liquide, près du vase, avec la partie inférieure du vase, est égal à $\frac{k}{h}$.

Liège le 15. Décembre 1834.

5.

Additamentum ad commentationem 15. pag. 182. in hujus diarii volumine XIV^{to}.

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph.)

Quantitates $\overset{1}{\Phi}$, $\overset{2}{\Phi}$, $\overset{3}{\Phi}$, $\overset{4}{\Phi}$, etc. ipsae celerrime decrescunt, ipsarumque limes Φ certo $= 0$ est; est enim

$$\Phi = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin\varphi^3\cos\varphi - \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^5\cos\varphi - \text{etc.}$$

Nota vero est series $\varphi = \sin\varphi\cos\varphi + \frac{2}{3}\sin\varphi^3\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^5\cos\varphi + \ldots.$ quam in theoria functionum potentialium (pag. 22.) invenies, quapropter $\Phi = 0$ est. Hinc sequitur primo, etiam seriem

$$Q = \varphi . p + \frac{1}{2}\overset{1}{\Phi}\overset{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{\Phi}\overset{2}{p} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{3}{\Phi}\overset{3}{p} + \text{etc.}$$

rapide convergere. Usus et hujus seriei in computandis tabulis est perquam commodus, ubi amplitudo φ spectatur constans, numeri vero p, $\overset{1}{p}$, $\overset{2}{p}$, etc. spectantur variabiles. Si e. g. valores integralis

$$\int_0 \frac{d\varphi}{\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}} \quad \text{sive} \quad \int_0 d\varphi\sqrt{(1 - k^2\sin^2\varphi)}.$$

e dató valore amplitudinis φ computare vis omnes, modulus k est variabilis, ideoque variabiles etiam sunt $\overset{1}{p}$, $\overset{2}{p}$, $\overset{3}{p}$, $\overset{4}{p}$, etc., quae pendent a modulo k, et semel computatis valoribus $\overset{1}{\Phi}$, $\overset{2}{\Phi}$, $\overset{3}{\Phi}$, $\overset{4}{\Phi}$ etc. pro quovis tunc modulo k utimur.

Operae pretium foret computare tabulas auxiliares functionum

$$\overset{1}{\Phi} = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi = \frac{2}{3}\sin\varphi^3\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^5\cos\varphi + \ldots.$$

$$\overset{2}{\Phi} = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\sin\varphi^3\cos\varphi = \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^5\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\varphi^7\cos\varphi + \ldots.$$

$$\overset{3}{\Phi} = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\sin\varphi^3\cos\varphi - \frac{2.4}{3.5}\sin\varphi^5\cos\varphi = \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\varphi^7\cos\varphi + \ldots.$$

etc. etc.

quarum usus est frequentissimus. Eaedem functiones etiam exprimuntur formulis

$$\overset{1}{\Phi} = \varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi$$

$$\overset{2}{\Phi} = \varphi - \frac{2}{3}\sin 2\varphi + \frac{2.1}{3.4}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2},$$

$$\overset{3}{\Phi} = \varphi - \frac{3}{4}\sin 2\varphi + \frac{3.2}{4.5}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{3.2.1}{4.5.6}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{6},$$

$$\overset{4}{\Phi} = \varphi - \frac{4}{5}\sin 2\varphi + \frac{4.3}{5.6}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{4.3.2}{5.6.7}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{6} + \frac{4.3.2.1}{5.6.7.8}\cdot\frac{\sin 8\varphi}{4}$$

sive generalius formula

$$\overset{r}{\Phi} = \varphi - \frac{r}{r+1}\sin 2\varphi + \frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)}\cdot\frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)}\cdot\frac{\sin 6\varphi}{3} + \text{etc.}$$

Ubi in serie (7.) substituitur series pro φ, quam supra allegavimus, formula abit in

$$Q = p\sin\varphi\cos\varphi + \frac{2}{3}\left(p + \frac{1}{2}\overset{1}{p}\right)\sin\varphi^3\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}\left(p + \frac{1}{2}\overset{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p}\right)\sin\varphi^5\cos\varphi$$
$$+ \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(r + \frac{1}{2}\overset{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{3}{p}\right)\sin\varphi^7\cos\varphi + \text{etc.},$$

quae vero series non tam rapide convergit, quam series prior, unde derivata est.

Scripsi Monast. Guestphal. 20mo Julii 1835.

6.

De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis.

(Auct. *C. G. J. Jacobi*, prof ord. math. Regiom.)

1.

E variis methodis, quae ad eliminationem variabilis e duabus aequationibus algebraicis proponuntur, extat, quam in libris, quae olim Cl. *Bézout* de elementis mathesis composuit, legisse memini, et quae prae ceteris multis nominibus se commendat. Quam praestantissimi Algebristae methodum sequentibus breviter exponam, eique varias addam observationes.

Aequationes duas propositas eiusdem ordinis esse supponamus; quoties enim altera inferioris ordinis esset, nil mutabitur, nisi quod coëfficientes potestatum superiorum, in ea deficientium, in formulis subsequentibus nullitati aequandae forent. Sint aequationes illae:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_0 = 0,$$
$$\varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_0 = 0,$$

Aequatione secunda per a_n, prima per b_n multiplicata, et altera de altera subducta, prodit aequatio $(n-1)^{ti}$ ordinis. Aequatione secunda per $a_n x + a_{n-1}$, prima per $b_n x + b_{n-1}$ multiplicata, et subductione facta, alteram aequationem $(n-1)^{ti}$ ordinis eruis. Aequatione secunda per $a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2}$, prima per $b_n x^2 + b_{n-1} x + b_{n-2}$ multiplicata, et subductione facta, tertiam aequationem $(n-1)^{ti}$ ordinis eruis. Quibus continuatis, e duabus aequationibus propositis n alias aequationes $(n-1)^{ti}$ ordinis deducere licet, quarum postrema obtinetur, aequatione secunda multiplicata per $a_n x^{n-1} + a^{n-1} x^{n-2} + \ldots + a_1$, prima per $b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_1$, et subductione facta. Ex his aequationibus *Eulerus* olim in *Introductione* primam et postremam adhibuit, ut e duabus aequationibus propositis duae aliae deducantur ordinis proxime inferioris; de quibus per eandem methodum duabus aliis deductis ordinis unitate inferioris, repetito negotio tandem ad duas aequationes lineares pervenire docuit, e quibus et valor radicis communis pedi potest et aequatio conditionalis, e qua variabilis prorsus abiit. Sed ubi omnes n aequationes $(n-1)^{ti}$ ordinis, quas de propositis

dicto modo deducere licet, iuxta adhibes, ex illis n aequationibus, quae sunt inter $n-1$ quantitates $x, x^2, x^3, \ldots x^{n-1}$ lineares, has $n-1$ quantitates eliminare licet; quo facto statim ad aequationem finalem quaesitam pervenis. Haec est methodus a Cl. *Bézout* proposita, omnium, uti videtur, expeditissima; qua, videmus, problema de eliminatione variabilis e duabus aequationibus n^{ti} gradus revocari ad eliminationem $n-1$ variabilium e n aequationibus linearibus, quae eliminatio per formulam notam ac generalem absolvitur. Methodum illam iam ulterius prosequamur.

2.

Statuamus

$$1.\quad \begin{cases} m_0 &= [a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\ldots+a_1]\varphi(x)-[b_n x^{n-1}+b_{n-1}x^{n-2}+\ldots+b_1]f(x), \\ m_1 &= [a_n x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\ldots+a_2]\varphi(x)-[b_n x^{n-2}+b_{n-1}x^{n-3}+\ldots+b_2]f(x), \\ m_2 &= [a_n x^{n-3}+a_{n-1}x^{n-4}+\ldots+a_3]\varphi(x)-[b_n x^{n-3}+b_{n-1}x^{n-4}+\ldots+b_3]f(x), \\ \cdots & \cdots \\ m_{n-1} &= a_n\varphi(x)-b_n f(x), \end{cases}$$

sitque, termino constante per x^0 multiplicato,

$$2.\quad \begin{cases} m_0 &= \alpha_{0,0}x^0+\alpha_{1,0}x^1+\alpha_{2,0}x^2+\ldots+\alpha_{n-1,0}x^{n-1}, \\ m_1 &= \alpha_{0,1}x^0+\alpha_{1,1}x^1+\alpha_{2,1}x^2+\ldots+\alpha_{n-1,1}x^{n-1}, \\ m_2 &= \alpha_{0,2}x^0+\alpha_{1,2}x^1+\alpha_{2,2}x^2+\ldots+\alpha_{n-1,2}x^{n-1}, \\ \cdots & \cdots \\ m_{n-1} &= \alpha_{0,n-1}x^0+\alpha_{1,n-1}x^1+\alpha_{2,n-1}x^2+\ldots+\alpha_{n-1,n-1}x^{n-1}. \end{cases}$$

Erunt aequationes $(n-1)^{ti}$ ordinis, e quibus, ipsis $x^1, x^2, x^3, \ldots x^{n-1}$ eliminatis, aequatio quaesita prodit,

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad m_{n-1} = 0.$$

Naturam harum n aequationum accuratius examinemus.

Et primum observo, *in iis coëfficientium series horizontales et verticales easdem esse, sive haberi*

$$3.\quad \alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}.$$

Habetur enim

$$4.\quad \begin{aligned} m_s &= [a_n x^{n-s-1}+a_{n-1}x^{n-s-2}\ldots+a_{s+1}]\varphi(x)-[b_n x^{n-s-1}+b_{n-1}x^{n-s-2}\ldots+b_{s+1}]f(x) \\ &= \alpha_{0,s}x^0+\alpha_{1,s}x^1+\alpha_{2,s}x^2+\ldots+\alpha_{n-1,s}x^{n-1}, \end{aligned}$$

ideoque substitutis expressionibus

$$f(x) = a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_0,$$
$$\varphi(x) = b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\ldots+b_0,$$

invenitur

$$5.\quad \begin{aligned} \alpha_{r,s} &= a_{s+1}b_r+a_{s+2}b_{r-1}+a_{s+3}b_{r-2}+\ldots+a_{r+s+1}b_0 \\ &\quad -[b_{s+1}a_r+b_{s+2}a_{r-1}+b_{s+3}a_{r-2}+\ldots+b_{r+s+1}a_0]. \end{aligned}$$

Si $r+s+1>n$, expressio superior tantum usque ad terminum $a_n b_{r+s+1-n}$, inferior usque ad terminum $-b_n a_{r+s+1-n}$ continuatur.

Permutatis inter se r et s, fit

$$\begin{aligned} \alpha_{s,r} &= a_{r+1} b_s + a_{r+2} b_{s-1} + a_{r+3} b_{s-2} + \dots + a_{r+s+1} b_0 \\ &\quad - [b_{r+1} a_s + b_{r+2} a_{s-1} + b_{r+3} a_{s-2} + \dots + b_{r+s+1} a_0]. \end{aligned}$$

Sit $s>r$, haec expressio illam excedit terminis

$$a_{r+1} b_s + a_{r+2} b_{s-1} + \dots + a_s b_{r+1} - [b_{r+1} a_s + b_{r+2} a_{s-1} + \dots + b_s a_{r+1}],$$

qui cum sponte se destruant, prodit $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$, q. d. e.

E formulis (1.), (2.) sequens fluit:

$$\begin{aligned} m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_{n-1} x^{n-1} &= \Sigma \alpha_{r,s} x^r x^s \\ &= [n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1] \varphi(x) \\ &\quad - [n b_n x^{n-1} + (n-1) b_{n-1} x^{n-2} + \dots + b_1] f(x), \end{aligned}$$

siquidem in summa assignata numeris r, s valores $0, 1, 2, \dots n-1$ tribuimus. Quam formulam etiam sic exhibere licet:

$$m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + \dots + m_{n-1} x^{n-1} = \Sigma \alpha_{r,s} x^r x^s = \varphi(x) \frac{\partial f(x)}{\partial x} - f(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}.$$

3.

Consideratis $x^0, x^1, x^2, \dots x^{n-1}$ tamquam n incognitis, statuamus, per resolutionem n aequationum linearium (2.) obtineri:

$$6.\quad \begin{cases} L.x^0 = A_{0,0} m_0 + A_{0,1} m_1 + A_{0,2} m_2 + \dots + A_{0,n-1} m_{n-1}, \\ L.x^1 = A_{1,0} m_0 + A_{1,1} m_1 + A_{1,2} m_2 + \dots + A_{1,n-1} m_{n-1}, \\ L.x^2 = A_{2,0} m_0 + A_{2,1} m_1 + A_{2,2} m_2 + \dots + A_{2,n-1} m_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L.x^{n-1} = A_{n-1,0} m_0 + A_{n-1,1} m_1 + A_{n-1,2} m_2 + \dots + A_{n-1,n-1} m_{n-1}, \end{cases}$$

ubi

$$L = \Sigma \pm \alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \dots \alpha_{n-1,n-1},$$

siquidem per summam illam, uti saepius, designamus aggregatum $1.2.3\dots n$ terminorum, qui e termino $\alpha_{0,0}\, \alpha_{1,1}\, \alpha_{2,2} \dots \alpha_{n-1,n-1}$ proveniunt, indicibus omnibus aut prioribus aut posterioribus omnimodis inter se permutatis, singulis terminis praefixo signo aut $+$ aut $-$ ea lege, ut binis ex indicibus aut prioribus aut posterioribus inter se commutatis, tota expressio L valorem oppositum induat.

Proprietatem aequationum propositarum (2.), coëfficientium series horizontales et verticales easdem esse, notum est, etiam aequationibus earum inversis convenire (6.), sive haberi

$$7.\quad A_{s,r} = A_{r,s},$$

Aequatio finalis, quae ipsis $x^1, x^2, \dots x^{n-1}$ ex aequationibus $m_0 = 0$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $\dots$ $m_{n-2} = 0$ eliminatis, prodit, est

$$8. \qquad L = \Sigma \pm a_{0,0}\, a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n-1,n-1}.$$

Radicis communis x et potestatum eius, varias expressiones eruimus. Omittamus enim e n aequationibus

$$m_0 = 0,\; m_1 = 0,\; m_2 = 0,\; \dots\; m_{n-1} = 0,$$

unam aliquam; e reliquis $n-1$ aequationibus rationes determinantur, in quibus sunt n incognitae $x^0, x^1, x^2, \dots x^{n-1}$; et prout aequatio omissa est prima, secunda, tertia, cet., n^{ta}, n varii modi habentur, quibus rationes illae determinentur.

Si aequatio non adhibetur $m_r = 0$, habetur e (6.):

$$9. \qquad x^0 : x^1 : x^2 \dots : x^{n-1} = A_{0,r} : A_{1,r} : A_{2,r} \dots : A_{n-1,r},$$

unde

$$x^{r'} : x^{s'} = A_{r',r} : A_{s',r}.$$

Eodem modo invenitur, si aequationis $m_{r'} = 0$ usus non fit,

$$x^0 : x^1 : x^2 \dots : x^{n-1} = A_{0,r'} : A_{1,r'} : A_{2,r'} \dots : A_{n-1,r'},$$

unde

$$x^r : x^s = A_{r,r'} : A_{s,r'},$$

ideoque cum sit $A_{r,r'} = A_{r',r}$, fit, utraque proportione addita,

$$10. \qquad x^s \cdot x^{r'} : x^{s'} \cdot x^r = A_{s,r'} : A_{s',r} = A_{r',s} : A_{s',r}.$$

Videmus igitur, designantibus m, m' binos quos libet e numeris 0, 1, 2, $\dots$ $n-1$, producta $x^m \cdot x^{m'}$ esse ut quantitates $A_{m,m'}$. Unde sequitur, quoties $r + s = r' + s'$, fieri:

$$A_{r,s} = A_{r',s'}.$$

4.

Aequatio finalis inventa

$$L = \Sigma \pm a_{0,0}\, a_{1,1}\, a_{2,2} \dots a_{n-1,n-1} = 0,$$

factore superfluo non affecta est. Nam cum quantitates a et respectu constantium a_m et respectu constantium b_m sint lineares, patet expressionem L et respectu constantium a et respectu constantium b_m ad n^{tam} dimensionem ascender. Quam respectu utrarumque constantium dimensionem esse aequationis finalis genuinae, ab omni factore alieno liberae, *a priori* constat.

Observavit enim iam olim *Eulerus* in Commentariis veteribus Academiae Berolinensis T. IV. ad a. 1748, veram ac genuinam obtineri aequationem finalem, quae eliminata x ex aequationibus $f(x)=0$, $\varphi(x)=0$ provenjat, si radices alterius aequationis $\varphi(x)=0$ omnes in altera functione $f(x)$ substituantur, atque productum ex valoribus, quae ea substitutione eruuntur, $=0$ ponatur. Cuius producti respectu constantium, quae functionem $f(x)$ afficiunt, patet eandem dimensionem esse atque numerum radicum sive gradum aequationis $\varphi(x)=0$. Qua de re, cum valere de altera functione debeant, quae de altera valent, si $L=0$ aequatio finalis genuina, designante L expressionem integram constantium, quae functiones $f(x)$, $\varphi(x)$ afficiunt, ipsa L respectu constantium functionis $f(x)$ eiusdem dimensionis erit atque functionis $\varphi(x)$ gradus est, respectu constantium functionis $\varphi(x)$ eiusdem dimensionis atque functionis $f(x)$ gradus est. Casu igitur nostro, quo utrique functioni $f(x)$, $\varphi(x)$ est n^{tus} gradus, expressio L respectu et huius et illius constantium ad n^{tam} dimensionem per ipsam naturam quaestionis assurgit, sicuti expressio supra inventa $\Sigma \pm a_{0,0}\, a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots . a_{n-1,n-1}$, neque ad minorem ascendere postest.

Quoties igitur in calculis nostris sequentibus incidemus in aequationem aliquam $M=0$, in qua M expressio integra rationalis constantium a_m, b_m, quae respectu sive harum sive illarum ad minorem quam n^{tam} dimensionem ascendit, concludemus, illam non esse posse aequationem finalem neque per eam divisibilem, sed ipsam M *indice* evanescere.

5.

Expressiones $A_{r,s}$, et respectu constantium a_m, et respectu constantium b_m $(n-1)^{\text{tae}}$ dimensionis sunt. Unde aequatio §. 3. inventa

$$A_{r,s} = A_{r',s'},$$

cum et respectu constantium a_m, et respectu constantium b_n tantum ad $(n-1)^{\text{tam}}$ dimensionem ascendat, e §° antecedente identica esse debet; sive *quantitates omnes $A_{r,s}$, quibus eadem est summa indicum $r+s$, identicae sunt.*

Expressiones $A_{r,s}$, cum tantum a summa indicum pendeant, exhibebimus in sequentibus per characterem

$$11. \qquad A_{r,s} = A_{r+s}.$$

Quo adhibito notationis modo, videmus, *eam esse naturam coëfficientium $a_{r,s}$ quae aequationes lineares afficiunt, e quibus eliminatione incognitarum facta aequatio finalis quaesita petitur, ut posito:*

$$12.\quad \begin{cases} a_{0,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + a_{0,2}x_2 + \dots + a_{0,n-1}x_{n-1} = m_0, \\ a_{1,0}x_0 + a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} = m_1, \\ a_{2,0}x_0 + a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n-1}x_{n-1} = m_2, \\ \dots \\ a_{n-1,0}x_0 + a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \dots + a_{n-1,n-1}x_{n-1} = m_{n-1}, \end{cases}$$

aequationes inversae, quibus quantitates x_r per quantitates m_r exhibentur, formam sequentem induant,

$$13.\quad \begin{cases} L.x_0 = A_0 m_0 + A_1 m_1 + A_2 m_2 + \dots + A_{n-1} m_{n-1}, \\ L.x_1 = A_1 m_0 + A_2 m_1 + A_3 m_2 + \dots + A_n\ m_{n-1}, \\ L.x_2 = A_2 m_0 + A_3 m_1 + A_4 m_2 + \dots + A_{n+1} m_{n-1}, \\ \dots \\ L.x_{n-1} = A_{n-1} m_0 + A_n m_1 + A_{n+1} m_2 + \dots + A_{2n-2} m_{n-1}. \end{cases}$$

Adnotemus, substitutis aequationibus (13.) in aequatione (12.):

$$a_{r,0}x_0 + a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + \dots + a_{r,n-1}x_{n-1} = m_r,$$

sequi,

$$14.\quad a_{r,0}A_r + a_{r,1}A_{r+1} + a_{r,2}A_{r+2} + \dots + a_{r,n-1}A_{r+n-1} = L,$$

porro, si r et s inter se diversi, fieri identicae:

$$15.\quad a_{r,0}A_s + a_{r,1}A_{s+1} + a_{r,2}A_{s+2} + \dots + a_{r,n-1}A_{s+n-1} = 0,$$

quibus in formulis numeri r, s valores omnes $0, 1, 2, \dots n-1$ induere possunt.

6.

Sequitur e formulis (10.), (11.):

$$x^{r+s} : x^{r'+s'} = A_{r'+s} : A_{s'+r},$$

ubi r, r', s, s' sunt numeri quicunque e numeris $0, 1, 2, \dots n-1$. Unde videmus, *quoties pro valore ipsius x aequationes $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$ simul locum habeant, ideoque sit $L = 0$, ipsius x potestates x^m esse inter se ut quantitates A_m, designante m unum aliquem e numeris $0, 1, 2, \dots 2n-2$, sive haberi:*

$$16.\quad 1 : x : x^2 : x^3 \dots : x^{2n-2} = A_0 : A_1 : A_2 : A_3 \dots : A_{2n-2}.$$

Unde variae relationes deduci possunt, quae inter quantitates $A_0, A_1, \dots$ $\dots A_{2n-2}$ intercedunt, simul ac inter constantes a_m, b_m aequatio conditionalis $L = 0$ locum habet. Ita invenitur e (16.):

$$17.\quad A_m . A_{m'} = A_{m+m'}, \qquad A_0^{m-1} A_m = A_1^m,$$

sive expressiones

$$A_m . A_{m'} - A_{m+m'}, \qquad A_0^{m-1} A_m - A_1^m$$

esse per L divisibiles.

Si aequationes propositae

$$0 = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0,$$
$$0 = \varphi(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_0,$$

per $1, x, x^2, \dots x^{n-2}$ multiplicantur, et in productis potestates ipsius x per quantitates A_m exprimuntur, prodeunt aequationes:

$$18. \quad \begin{cases} 0 = a_0 A_0 + a_1 A_1 + a_2 A_2 + \dots + a_n A_n, \\ 0 = a_0 A_1 + a_1 A_2 + a_2 A_3 + \dots + a_n A_{n+1}, \\ 0 = a_0 A_2 + a_1 A_3 + a_2 A_4 + \dots + a_n A_{n+2}, \\ \dots \\ 0 = a_0 A_{n-2} + a_1 A_{n-1} + a_2 A_n + \dots + a_n A_{2n-2}, \end{cases}$$

$$19. \quad \begin{cases} 0 = b_0 A_0 + b_1 A_1 + b_2 A_2 + \dots + b_n A_n, \\ 0 = b_0 A_1 + b_1 A_2 + b_2 A_3 + \dots + b_n A_{n+1}, \\ 0 = b_0 A_2 + b_1 A_3 + b_2 A_4 + \dots + b_n A_{n+2}, \\ \dots \\ 0 = b_0 A_{n-2} + b_1 A_{n-1} + b_2 A_n + \dots + b_n A_{2n-2}, \end{cases}$$

At expressiones ad dextram in aequationibus (18.) respectu constantium b_m, in aequationibus (19.) respectu constantium a_m tantum ad $(n-1)^{\text{tam}}$ dimensionem ascendunt; unde ex observationibus §. 4. factis *aequationes* (18.), (19.) *identicae sunt.*

Vidimus, e constantibus, quae duas aequationes propositas n^{ti} gradus afficiunt, formari posse $2n-1$ expressiones integras, quae respectu constantium alterutrius aequationis ad $(n-1)^{\text{tam}}$ dimensionem ascendunt, et quae, quoties aequationes propositae radicem communem habent, sunt ut potestates radicis communis $0^{\text{ta}}, 1^{\text{ta}}, 2^{\text{ta}}, \dots (2n-2)^{\text{ta}}$. Et facile liquet ex antecedentibus, *eiusmodi expressionem, quae sit ut* $(2n-1)^{\text{ta}}$ *potestas radicis communis, non dari.*

Sit enim A_{2n-1} eiusmodi expressio talis ut habeatur:

$$x^0 : x^1 : x^2 \dots : x^{2n-2} : x^{2n-1} = A_0 : A_1 : A_2 \dots : A_{2n-2} : A_{2n-1};$$

multiplicatis aequationibus propositis per x^{n-1}, et loco potestatum ipsius x substitutis ipsis A_m, invenitur:

$$a_0 A_{n-1} + a_1 A_n + a_2 A_{n+1} + \dots + a_n A_{2n-1} = 0,$$
$$b_0 A_{n-1} + b_1 A_n + b_2 A_{n+1} + \dots + b_n A_{2n-1} = 0,$$

quae aequationes identicae esse debent, cum respectu constantium alterius aequationes tantum ad $(n-1)^{\text{tam}}$ dimensionem ascendant. Aequatione prima iuncta aequationibus (18.), secunda aequationibus (19.), ex altero aequationum systemate derivari possunt rationes, in quibus sunt quantitates

a_0, a_1, a_2, ... a_n, ex altero rationes, in quibus sunt quantitates b_0, b_1, b_2, ... b_n. Quae rationes cum plane eaedem ex utroque systemate proveniant, haberetur

$$a_0 : a_1 : a_2 \ldots : a_n = b_0 : b_1 : b_2 \ldots : b_n, \ldots$$

quod absurdum est.

7.

Sint M, N functiones ipsius x rationales integrae $(n-1)^{ti}$ ordinis; in quibus cum sit coefficientium numerus $2n$, eas semper ita determinare licet, ut expressio . . . .

$$Mf(x) + N\varphi(x) = P,$$

datae cuilibet expressioni ipsius x rationali integrae $(2n-1)^{ti}$ ordinis aequalis evadat. Quae coëfficientium ipsarum M, N determinatis resolutionem $2n$ aequationum linearium inter $2n$ incognitas propositarum postulat. Vocemus L denominatorem communem valoribus coëfficientium algebraicis, qui per resolutionem illam obtinentur, ac statuamus

$$Mf(x) + N\varphi(x) = P = L.Q,$$

inveniantur coëfficientes functionum M, N ut expressiones integrae constantium, quae functiones $f(x)$, $\varphi(x)$, Q afficiunt.

Quoties simul $f(x) = 0$, $\varphi(x) = 0$, erit etiam $L = 0$; statuere enim licet $Q = 1$. Quae aequatio, cum sit a x libera, ipsa est aequatio finalis quaesita, quae cum supra inventa prorsus convenit. Adhibuere hanc methodum ad eliminationem praestandam primus Cl. *Euler* in Actis Acad. Ber. T. XX. ad a. 1764. Demonstremus iam, quomodo, si Q sive 1, sive x, x^2, x^3, ... x^{2n-1}, sive functio ipsius x rationalis integra $(2n-1)^{ti}$ ordinis quaecunque, functiones multiplicatrices M, N generaliter per expressiones A_0, A_1, A_2, ... A_{2n-2} determinentur.

Restituto in (13.) x loco x_r, provenit, designante r unum e numeris 0, 1, 2, ... $n-1$,

$$L_r x^r = A_r m_0 + A_{1+r} m_1 + A_{2+r} m_2 + \ldots + A_{n-1+r} m_{n-1}.$$

In qua aequatione si substituimus ipsarum m_0, m_1, m_2, ... m_{n-1} expressiones §. 2. (1.), videmus, posito

$$\begin{aligned} 20. \quad -M_r = {} & A_r\,[b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \ldots + b_1] \\ & + A_{r+1}[b_n x^{n-2} + b_{n-1} x^{n-3} + \ldots + b_2] \\ & + A_{r+2}[b_n x^{n-3} + b_{n-1} x^{n-4} + \ldots + b_3] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + A_{r+n-1}\, b_n \end{aligned}$$

$$N_r = A_r[a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1]$$
$$+ A_{r+1}[a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \dots + a_2]$$
$$+ A_{r+2}[a_n x^{n-3} + a_{n-1} x^{n-4} + \dots + a_3]$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$+ A_{r+n-1} \cdot a_n,$$

fieri

$$21. \quad M_r f(x) + N_r \varphi(x) = L . x^r.$$

Numerus r in antecedentibus tantum valores $0, 1, 2, \dots, n-1$ induere potest; ut functiones multiplicatrices casu, quo r valores $n, n+1, \dots 2n-1$ induit, e formulis nostris eruamus, sequentia addo.

8.

Statuamus, in formulis omnibus, antecedentibus traditis, poni $\frac{1}{x}$ loco x, simulque a_r, b_r mutemus in a_{n-r}, b_{n-r}; quo facto functiones $f(x)$, $\varphi(x)$ abeunt in $x^{-n} f(x)$, $x^{-n} \varphi(x)$. Eadem mutatione abit

$$m_r = [a_n x^{n-r-1} + a_{n-1} x^{n-r-2} + \dots + a_{r+1}] \varphi(x)$$
$$- [b_n x^{n-r-1} + b_{n-1} x^{n-r-2} + \dots + b_{r+1}] f(x),$$

in

$$[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-r-1} x^{n-r-1}] \frac{\varphi(x)}{x^{2n-r-1}}$$
$$-[b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-r-1} x^{n-r-1}] \frac{f(x)}{x^{2n-r-1}}.$$

Quae expressio facile huic aequalis evadit;

$$-[a_{n-r} + a_{n-r+1} x + a_{n-r+2} x^2 + \dots + a_n x^r] \frac{\varphi(x)}{x^{n-1}}$$
$$+ [b_{n-r} + b_{n-r+1} x + b_{n-r+2} x^2 + \dots + b_n x^r] \frac{f(x)}{x^{n-1}},$$

sive ipsi

$$-\frac{m_{n-1-r}}{x^{n-1}}.$$

Iam fit:

$$m_r = \alpha_{0,r} + \alpha_{1,r} x + \alpha_{2,r} x^2 + \dots + \alpha_{n-1,r} x^{n-1},$$
$$\frac{m_{n-1-r}}{x^{n-1}} = \alpha_{n-1,n-1-r} + \alpha_{n-2,n-1-r} \frac{1}{x} + \alpha_{n-3,n-1-r} \frac{1}{x^2} + \dots + \alpha_{0,n-1-r} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}.$$

Unde videmus, per mutationem indicatam abire $\alpha_{s,r}$ in $-\alpha_{n-1-s,n-1-r}$. Observo porro generaliter, propositis aequationibus linearibus quibuscunque (2.), si loco $\alpha_{s,r}$ ponitur $\alpha_{n-1-s,n-1-r}$, in aequationibus inversis (6.) ipsum L immutatum manere, $A_{r,s}$ abire in $A_{n-1-r,n-1-s}$. Ubi simul coëfficientes omnes $\alpha_{r,s}$ signum mutant, L, $A_{r,s}$ abeunt in $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1} A_{r,s}$. Hinc casu nostro per mutationem indicatam L, A_r abeunt in $(-1)^n L$,

$(-1)^{n-1} A_{2n-2-r}$; ideoque posito $\frac{1}{x}$ loco x, a_{n-r}, b_{n-r} loco a_r, b_r abeunt $f(x)$, $\varphi(x)$, m_r, $\alpha_{r,s}$, L, A_r in $\frac{f(x)}{x^n}$, $\frac{\varphi(x)}{x^n}$, $-\frac{m_{n-1-r}}{x^{n-1}}$, $-\alpha_{n-1-r,n-1-s}$, $(-1)^n L$, $(-1)^{n-1} A_{2n-2-r}$. Quibus factis mutationibus in (20.), (21.), simulque multiplicatione per $(-1)^n x^{2n-1}$ facta, obtinetur

$$22. \qquad M_{2n-1-r} f(x) + N_{2n-1-r} \varphi(x) = L . x^{2n-1-r},$$

ubi

$$23. \qquad \begin{aligned} M_{2n-1-r} = & \; A_{2n-2-r} \, [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] \\ & + A_{2n-3-r} x \, [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-2} x^{n-2}] \\ & + A_{2n-4-r} x^2 [b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{n-3} x^{n-3}] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + A_{n-1-r} x^{n-1} . b_0, \\ -N_{2n-1-r} = & \; A_{2n-2-r} \, [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1}] \\ & + A_{2n-3-r} x \, [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-2} x^{n-2}] \\ & + A_{2n-4-r} x^2 [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-3} x^{n-3}] \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & + A_{n-1-r} x^{n-1} . a_0 . \end{aligned}$$

Quibus in formulis r rursus valores $0, 1, 2, \dots n-1$ induere potest, ideoque $2n-1-r$ valores $n, n+1, n+2, \dots 2n-1$. Unde functiones multiplicatrices quaesitae omnes determinatae sunt. E quibus iam facile componis expressiones ipsarum M, N, quoties

$$Q = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots + l_{2n-1} x^{2n-1}.$$

Erit enim:

$$\begin{aligned} M &= l_0 M_0 + l_1 M_1 + \dots + l_{2n-1} M_{2n-1}, \\ N &= l_0 N_0 + l_1 N_1 + \dots + l_{2n-1} N_{2n-1}. \end{aligned}$$

9.

Si $r < n$, eruimus e (20.) functiones multiplicatrices per formulas

$$24. \qquad \begin{cases} -M_r = \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x_2} + \frac{A_{r+2}}{x_3} + \dots + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right] \varphi(x), \\ N_r = \left[\frac{A_r}{x} + \frac{A_{r+1}}{x_2} + \frac{A_{r+2}}{x_3} + \dots + \frac{A_{r+n-1}}{x^n}\right] f(x), \end{cases}$$

addita conditione, ut potestates ipsius x negativae reiiciantur. Si $r \geqq n$, eruimus e (23.) ponendo r loco $2n-1-r$:

$$25. \qquad \begin{aligned} M_r &= [A_{r-1} + A_{r-2} x + A_{r-3} x^2 + \dots + A_{r-n} x^{n-1}] \varphi(x) \\ -N_r &= [A_{r-1} + A_{r-2} x + A_{r-3} x^2 + \dots + A_{r-n} x^{n-1}] f(x), \end{aligned}$$

addita conditione, ut potestates ipsius x superiores $(n-1)^{\text{ta}}$ reiiciantur. Casu, quo functiones $f(x)$, $\varphi(x)$ factorem linearem communem habent

$x-\xi$, vidimus haberi

$$\frac{A_r}{A_0}=\xi^r.$$

Unde facile patet, eo casu fieri

$$26.\quad\begin{cases}-M_r = A_0.\dfrac{\xi^r\varphi(x)-x^r\varphi(\xi)}{x-\xi} = A_0\xi^r.\dfrac{\varphi(x)}{x-\xi},\\ N_r = A_0.\dfrac{\xi^r f(x)-x^r f(\xi)}{x-\xi} = A_0\xi^r.\dfrac{f(x)}{x-\xi}.\end{cases}$$

Quam functionum multiplicatricium naturam *Eulerus* in commentatione citata indicavit. Valores, quos M_r, N_r induunt, si in iis $x=\xi$, ponitur, fiunt ex antecedentibus $-A_0\xi^r\varphi'(\xi)$, $A_0\xi^r f'(\xi)$, siquidem $\varphi'(x)=\frac{d\varphi(x)}{dx}$, $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$.

10.

Inter functiones multiplicatrices M_r, N_r, quae diversis ipsius r valoribus respondent, variae relationes locum habent, quas sequentibus examinemus.

Contemplemur primum functiones multiplicatrices M_r, N_r, in quibus $r\leqq n-2$. Sequitur e (20.), omissis terminis se mutuo destruentibus,

$$-[xM_r-M_{r+1}]$$
$$=A_r[b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+b_1 x]-[A_{r+1}b_1+A_{r+2}b_2+\ldots.+A_{r+n}b_n],$$

sive cum e (18.) sit

$$0=A_r b_0+A_{r+1}b_1+A_{r+2}b_2+\ldots.+A_{r+n}b_n,$$

erit

$$-[xM_r-M_{r+1}]=A_r[b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+b_1 x+b_0]=A_r\varphi(x),$$

eodemque modo invenitur:

$$xN_r-N_{r+1}=A_r[a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots.+a_0]=A_r f(x).$$

Sit iam $r\leqq n$; si in (23.) loco $2n-r-1$ ponimus r, $r+1$, eruimus, reiectis terminis se destruentibus,

$$-[xM_r-M_{r+1}]=A_r[b_0+b_1 x+\ldots.+b_{n-1}x^{n-1}]$$
$$-[A_{r-1}b_{n-1}+A_{r-2}b_{n-2}+\ldots.+A_{r-n}b_0]x_n;$$

sive cum sit e (18.):

$$A_{r-n}b_0+A_{r-n+1}b_1+\ldots.+A_{r-1}b_{n-1}+A_r b_n=0,$$

erit, ut antea:

$$-[xM_r-M_{r+1}]=A_r[b_0+b_1 x+\ldots.+b_n x^n]=A_r\varphi(x),$$

eodemque modo invenitur:

$$xN_r-N_{r+1}=A_r[a_0+a_1 x+\ldots.+a_n x^n]=A_r f(x).$$

Statuamus denique in (20.) $r=n-1$, in (23.) $r=n$; invenitur:

$$[xM_{n-1}-M_n] =$$
$$\begin{aligned} b_0 A_{n-1} &+ x[b_1 A_{n-1}+b_0 A_{n-2}+b_1 A_{n-1}+b_2 A_n+\dots\dots\dots\dots+b_n A_{2n-2}] \\ &+ x^2[b_2 A_{n-1}+b_1 A_{n-2}+b_0 A_{n-3}+b_2 A_{n-1}+b_3 A_n+\dots\dots+b_n A_{2n-3}] \\ &+ x^3[b_3 A_{n-1}+\dots\dots\dots+b_0 A_{n-4}+b_3 A_{n-1}+\dots\dots\dots\dots+b_n A_{2n-4}] \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &+ x^{n-1}[b_{n-1}A_{n-1}+\dots\dots+b_0 A_0+b_{n-1}A_{n-1}+b_n A_n] \\ &+ x^n . b_n A_{n-1}, \end{aligned}$$

quae expressio, adhibitis aequationibus (18.), in hanc abit:

$$-[xM_{n-1}-M_n] = A_{n-1}[b_0+b_1x+b_2x^2+\dots\dots+b_nx^n] = A_{n-1}.\varphi(x),$$

eodemque modo obtinetur:

$$xN_{n-1}-N_n = A_{n-1}[a_0+a_1x+a_2x^2+\dots\dots+a_nx^n] = A_{n-1}.f(x).$$

Unde patet, *designante r unum quemlibet e numeris* $0, 1, 2, \dots\dots 2n-3$, *haberi*,

$$27. \quad -[xM_r-M_{r+1}] = A_r.\varphi(x), \qquad xN_r-N_{r+1} = A_r.f(x).$$

Fit e (27.):

$$\begin{aligned} -[x^m M_r - x^{m-1}M_{r+1}] &= A_r x^{m-1}.\varphi(x), \\ -[x^{m-1}M_{r+1}-x^{m-2}M_{r+2}] &= A_{r+1}x^{m-2}.\varphi(x), \\ -[x^{m-2}M_{r+2}-x^{m-3}M_{r+3}] &= A_{r+2}x^{m-3}.\varphi(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ -[xM_{r+m-1}-M_{r+m}] &= A_{r+m-1}.\varphi(x). \end{aligned}$$

Plane similes e (27.) de functionibus N_r habentur formulae, quae ab antecedentibus eo tantum discrepant, quod loco $\varphi(x)$ ponendum $f(x)$ et signum negativum expressionibus ad laevam praefixum reiiciendum. Additione facta, prodit:

$$28. \quad \begin{cases} -[x^m M_r - M_{r+m}] = [A_r x^{m-1}+A_{r+1}x^{m-2}+\dots\dots+A_{r+m-1}]\varphi(x), \\ \quad x^m N_r - N_{r+m} = [A_r x^{m-1}+A_{r+1}x^{m-2}+\dots\dots+A_{r+m-1}]f(x). \end{cases}$$

Sit ex. gr. $r=0$, $m=2n-1$, erit:

$$29. \quad \begin{cases} -[x^{2n-1}M_0-M_{2n-1}] = [A_0x^{2n-2}+A_1x^{2n-3}+A_2x^{2n-4}+\dots\dots+A_{2n-2}]\varphi(x), \\ \quad x^{2n-1}N_0-N_{2n-1} = [A_0x^{2n-2}+A_1x^{2n-3}+A_2x^{2n-4}+\dots\dots+A_{2n-2}]f(x). \end{cases}$$

Porro ex aequationibus (27.):

$$-[xM_r-M_{r+1}] = A_r\varphi(x), \qquad -[xM_{r+1}-M_{r+2}] = A_{r+1}\varphi(x),$$

et e similibus, quae de functionibus N_r valent, hae sequuntur:

$$30. \quad \begin{cases} A_{r+1}xM_r-(A_{r+1}+A_rx)M_{r+1}+A_rM_{r+2} = 0, \\ A_{r+1}xN_r-(A_{r+1}+A_rx)N_{r+1}+A_rN_{r+2} = 0. \end{cases}$$

Tandem, cum sit

$$M_r f(x) + N_r \varphi(x) = Lx^r, \qquad M_s f(x) + N_s \varphi(x) = Lx^s,$$

erit

$$31.\quad M_r N_s - M_s N_r = \frac{L}{f(x)}[x^r N_s - x^s N_r] = \frac{L}{\varphi(x)}[x^s M_r - x^r M_s].$$

Unde e (27.), (28.), (29.) fit:

$$32.\quad M_{r+1} N_r - M_r N_{r+1} = L.A_r x^r,$$

$$33.\quad M_{r+m} N_r - M_r N_{r+m} = L[A_r x^{r+m-1} + A_{r+1} x^{r+m-2} + \ldots + A_{r+m-1} x^r],$$

$$34.\quad M_{2n-1} N_0 - M_0 N_{2n-1} = L[A_0 x^{2n-2} + A_1 x^{2n-3} + A_2 x^{2n-4} + \ldots + A_{2n-2}].$$

11.

Calculatis quantitatibus $a_r b_s - a_s b_r$, quorum numerus, cum ipsis r, s valores omnes conveniant a 0 usque ad n, est $\frac{n+1.n}{2}$, expressiones m_r sive coëfficientes $a_{r,s}$ per additiones successivas facile inveniuntur.

Ex aequationibus (1.) enim fit:

$$m_{r-1} = [a_n x^{n-r} + a_{n-1} x^{n-r-1} \ldots + a_r]\varphi(x) - [b_n x^{n-r} + b_{n-1} x^{n-r-1} \ldots + b_r] f(x),$$

$$m_r = [a_n x^{n-r-1} + a_{n-1} x^{n-r-2} \ldots + a_{r+1}]\varphi(x) - [b_n x^{n-r-1} + b_{n-1} x^{n-r-2} \ldots + b_{r+1}] f(x),$$

unde

$$35.\quad m_{r-1} - x m_r = a_r \varphi(x) - b_r f(x).$$

Quae pro $r = 0$, $r = n$ fit aequatio, reiectis expressionibus m_{-1}, m_n,

$$36.\quad -x m_0 = a_0 \varphi(x) - b_0 f(x).$$

Statuamus br. c.

$$(a_r b_s) = a_r b_s - a_s b_r,$$

atque sit:

$$(a_{n-1} b_0) + (a_{n-1} b_1) x + (a_{n-1} b_2) x^2 \ldots + (a_{n-1} b_{n-2}) x^{n-2} = u_{n-2},$$
$$(a_{n-2} b_0) + (a_{n-2} b_1) x + (a_{n-2} b_2) x^2 \ldots + (a_{n-2} b_{n-3}) x^{n-3} = u_{n-3},$$
$$(a_{n-3} b_0) + (a_{n-3} b_1) x + (a_{n-3} b_2) x^2 \ldots + (a_{n-3} b_{n-4}) x^{n-4} = u_{n-4},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(a_2 b_0) + (a_2 b_1) x = u_1,$$
$$(a_1 b_0) = u_0;$$

sit porro

$$\mu_r = a_{0,r} + a_{1,r} x + a_{2,r} x^2 \ldots + a_{r,r} x^r,$$

atque designemus per $[x\mu_r]$ productum $x\mu_r$, reiectis duobus terminis postremis, erit e (1.):

$$\mu_{n-1} = m_{n-1} = (a_n b_0) + (a_n b_1) x + (a_n b_2) x^2 \ldots + (a_n b_{n-1}) x^{n-1},$$

porro e (35.):

$$\mu_{n-2} = [x\mu_{n-1}] + u_{n-2},$$
$$\mu_{n-3} = [x\mu_{n-2}] + u_{n-3},$$
$$\mu_{n-4} = [x\mu_{n-3}] + u_{n-4},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\mu_1 = [x\mu_2] + u_1,$$
$$\mu_0 = u_0.$$

Inventis hoc modo $\mu_{n-1}, \mu_{n-2}, \ldots \mu_0$, statim etiam ipsae expressiones $m_{n-1}, m_{n-2}; \ldots, m_0$ habentur, suppletis terminis deficientibus ope formulae $a_{r,s} = a_{s,r}$.

E formula (35.)

$$m_{r-1} - x m_r = a_r \varphi(x) - b_r f(x),$$

sequitur, substitutis ipsarum m_r, m_{r-1}, $f(x)$, $\varphi(x)$ expressionibus, singulas ipsius x potestates comparando:

$$37. \qquad a_{r-1,s} - a_{r,s-1} = (a_r b_s);$$

in qua formula, si $r = n$ aut $r = 0$, terminus $a_{r,s-1}$ aut $a_{r-1,s}$ omittendus est.

Ex eadem formula (35.) fit

$$m_{r-1} - x m_r \;=\; a_r \varphi(x) - b_r f(x),$$
$$m_r - x m_{r+1} = a_{r+1} \varphi(x) - b_{r+1} f(x),$$
$$m_{r+1} - x m_{r+2} = a_{r+2} \varphi(x) - b_{r+2} f(x).$$

Unde, eliminatis $\varphi(x)$, $f(x)$:

$$38. \quad 0 = (a_{r+1} b_{r+2})(m_{r-1} - x m_r) + (a_{r+2} b_r)(m_r - x m_{r+1}) + (a_r b_{r+1})(m_{r+1} - x m_{r+2}),$$

in qua formula, si $r = 0$, $r = n-2$, terminus in m_{-1}, m_n ductus omittendus est.

12.

Inter coëfficientes $a_{r,s}$ variae locum habere debent relationes praeter hanc $a_{r,s} = a_{s,r}$. Sunt enim ipsae $a_{r,s}$ numero n^2 sive $\frac{n^2+n}{2}$, si $a_{r,s}$ et $a_{s,r}$ easdem censemus; omnesque pendent tantum a $2n+2$ quantitatibus a_r, b_r. Quarum quantitatum numerus adeo tribus minuitur, quia quantitates $a_r b_s - a_s b_r$ ideoque etiam quantitates $a_{r,s}$, quae ex illis componuntur, mutationem nullam subeunt, si loco a_r, b_r scribimus $\gamma a_r + \varepsilon b_r$, $\gamma' a_r + \varepsilon' b_r$, designantibus γ, ε, γ', ε' quantitates arbitrarias, inter quas aequatio locum habet $\gamma\varepsilon' - \gamma'\varepsilon = 1$. Unde videmus, e quantitatibus a_r, b_r tres ex arbitrio accipi posse, ideoque coëfficientes $a_{r,s} = a_{s,r}$, quarum numerus $\frac{n^2+n}{2}$, pendere tantum a $2n-1$ quantitatibus. Obtineri igitur de-

bent inter quantitates $a_{r,s} = a_{s,r}$ relationes numero $\frac{n^2-3n+2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$. Quarum relationum quodammodo locum tenet theorema supra inventum, quantitates $A_{r,s}$, quae sunt e quantitatibus $a_{r,s}$ certo modo compositae, eundem valorem habere, quoties indicum summa $r+s$ eundem valorem habet. Hinc enim quantitates omnes $A_{r,s}$, quarum numerus idem atque quantitatum $a_{r,s}$ et ipsae redeunt in $2n-1$ quantitates. At inter coëfficientes $a_{r,s}$ simpliciores adhuc relationes condi possunt, quam quae indicantur per formulam $A_{r,s} = A_{r+s}$.

Praemittamus theoremata quaedam sive nota sive alibi a nobis demonstrata (cf. comment. *de binis quibuslibet funct. homog.* etc. Vol. XII.). Designemus per typum

$$a \begin{Bmatrix} r_0\, r_1\, r_2 \ldots\ldots r_m \\ s_0\, s_1\, s_2 \ldots\ldots s_m \end{Bmatrix}$$

aggregatum $1.2.3\ldots\ldots m$ terminorum idem atque e notatione §. 3. adhibita exhibetur per expressionem

$$\Sigma \pm a_{r_0,s_0}\, a_{r_1,s_1}\, a_{r_2,s_2} \ldots\ldots a_{r_m,s_m}.$$

Unde ex. gr. erit e (8.)

$$L = a \begin{Bmatrix} 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \end{Bmatrix}.$$

Si in expressione ipsius L antecedente ex indicibus superioribus $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$ reiicis numerum r, ex iisdem indicibus inferioribus numerum s, obtines expressionem $A_{r,s}$. Quarum expressionum signum cum anceps sit, observo, id eo determinari, quod $a_{r,s} A_{r,s}$ e terminis ipsius L esse debet. Habetur vice versa

$$L^{n-1} = A \begin{Bmatrix} 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \end{Bmatrix}.$$

In qua expressione, si ex superioribus indicibus r, ex inferioribus s omittis, obtines

$$L^{n-2}.a_{r,s}.$$

Si vero e superioribus indicibus duos r, r', ex inferioribus duos s, s' omittis, obtines

$$L^{n-3}.\, a \begin{Bmatrix} r\, r' \\ s\, s' \end{Bmatrix}.$$

Ac generaliter, si in expressione

$$A \begin{Bmatrix} 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \\ 0\,1\,2 \ldots\ldots n-1 \end{Bmatrix}$$

e superioribus indicibus m sequentes $r, r', \ldots r^{(m-1)}$, ex inferioribus m sequentes $s, s', \ldots s^{(m-1)}$ omittis, obtines

$$L^{n-(1+m)}.\,\alpha\begin{Bmatrix} r\, r' \ldots r^{(m-1)} \\ s\, s' \ldots s^{(m-1)} \end{Bmatrix}.$$

Sint igitur $r, r', r'', \ldots, r^{(n-1)}$ atque $s, s', s'', \ldots s^{(n-1)}$ numeri omnes $0, 1, 2, \ldots n-1$, quocunque ordine scripti; erit

$$39.\quad A\begin{Bmatrix} r^{(m)}, r^{(m+1)}, \ldots r^{(n-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)}, \ldots s^{(n-1)} \end{Bmatrix} = L^{n-(1+m)}.\,\alpha\begin{Bmatrix} r, r', \ldots r^{(m-1)} \\ s, s', \ldots s^{(m-1)} \end{Bmatrix}.$$

Expressiones autem huiusmodi

$$\alpha\begin{Bmatrix} r\, r' \ldots r^{(m)} \\ s\, s' \ldots s^{(m)} \end{Bmatrix}, \qquad A\begin{Bmatrix} r\, r' \ldots r^{(m)} \\ s\, s' \ldots s^{(m)} \end{Bmatrix},$$

cum sit $\alpha_{r,s} = \alpha_{s,r}$, $A_{r,s} = A_{s,r}$ eaedem manent, si duo indicum systemata, superiores et inferiores, inter se commutantur. Porro cum expressiones $A_{r,s}$ non mutentur, altera indice unitate aucto simulque altero indice unitate minuto, etiam expressio

$$A\begin{Bmatrix} r^{(m)}, r^{(m+1)}, \ldots r^{(n-1)} \\ s^{(m)}, s^{(m+1)}, \ldots s^{(n-1)} \end{Bmatrix}$$

non mutabitur, si indices alterius systematis omnes simul unitate augentur, alterius omnes simul unitate minuuntur. Quod ut locum habere possit, ex illis non esse debet index altissimus $n-1$, ex his non esse debet index infimus 0. Unde vice versâ in expressione

$$\alpha\begin{Bmatrix} r, r', \ldots r^{(m-1)} \\ s, s', \ldots s^{(m-1)} \end{Bmatrix}$$

in altero indicum systemate esse debet $n-1$, in altero 0. Hinc concludimus e (39.), *expressionem*

$$\alpha\begin{Bmatrix} r, r', r'', \ldots, r^{(m-1)} \\ s, s', s'', \ldots s^{(m-1)} \end{Bmatrix},$$

si ex altero indicum systemate est $n-1$, *ex altero* 0, *valorem non mutare, si illius indices omnes unitate augeantur, huius unitate minuantur, qua in re* $n-1$ *auctus fieri debet* 0, 0 *minutus fieri debet* $n-1$. Quam proprietatem coëfficientium $\alpha_{r,s}$ repraesentare licet per aequationem

$$40.\quad \pm\alpha\begin{Bmatrix} r', r'', \ldots r^{(m-1)}, n-1 \\ s', s'', \ldots s^{(m-1)}, 0 \end{Bmatrix} = \alpha\begin{Bmatrix} r'+1, r''+1, \ldots r^{(m-1)}+1, 0 \\ s'-1, s''-1, \ldots s^{(m-1)}-1, n-1 \end{Bmatrix},$$

qua in formula sunt $r', r'', \ldots r^{(m-1)}$ numeri $m-1$ quilibet diversi e numeris $0, 1, 2, \ldots n-2$; porro $s', s'', \ldots s^{(m-1)}$ numeri $m-1$ quilibet diversi e numeris $1, 2, 3, \ldots n-1$. Signum ambiguum $\pm$ ut de-

terminetur, observo, aequationem (40.) redire debere in aequationem identicam inter quantitates $(a_r b_s)$ ope formulae (37.). Unde si statuis, expressionum (14.) terminos esse

$$+\alpha_{r',s'}\alpha_{r'',s''}\ldots\ldots\ldots\ldots\alpha_{r^{(m-1)},s^{(m-1)}}\alpha_{n-1,0},$$

$$+\alpha_{r'+1,s'-1}\alpha_{r''+1,s''-1}\ldots\alpha_{r^{(m-1)}+1,s^{(m-1)}-1}\alpha_{0,n-1},$$

facile coniicis, signum + eligendum esse, si $m-1$ impar, signum —, si $m-1$ par.

Si $m=2$, sequitur e formula generali (40.):

$$41.\quad \alpha_{n-1,0}\alpha_{r,s}-\alpha_{n-1,s}\alpha_{r,0}=\alpha_{0,n-1}\alpha_{r+1,s-1}-\alpha_{0,s-1}\alpha_{r+1,n-1},$$

quam facile per substitutionem valorum

$$\begin{aligned}\alpha_{n-1,r} &= \alpha_{r,n-1} = (a_n b_r),\\ \alpha_{0,r} &= \alpha_{r,0} = -(a_0 b_{r+1}),\\ \alpha_{r,s}-\alpha_{r+1,s-1} &= (a_{r+1} b_s),\end{aligned}$$

comprobas; quippe qua substitutione abit (41.) in aequationem:

$$42.\quad (a_n b_0)(a_{r+1} b_s)+(a_n b_s)(a_0 b_{r+1})=(a_0 b_s)(a_n b_{r+1}),$$

quae, tribus productis evolutis, identica esse invenitur.

13.

Relationes omnes, quae inter coëfficientes $\alpha_{r,s}$ locum habent, ad aequationes identicas inter quantitates $(a_r b_s)$ ducunt, per quas illae exprimi possunt; cuius rei exemplum antecedentibus dedimus. Vice versa aequatio quaevis identica inter quantitates $(a_r b_s)$ ad aequationem inter quantitates $\alpha_{r,s}$ ducit ope formulae (37.)

$$\alpha_{r-1,s}-\alpha_{r,s-1}=(a_r b_s).$$

Relatio inter quantitates $(a_r b_s)$ simplicissima, et de qua reliquae omnes fluunt, est haec:

$$(a_r b_s)(a_t b_u)+(a_r b_t)(a_u b_s)+(a_r b_u)(a_s b_t)=0,$$

quae cum (42.) convenit. De qua, substituta (37.), provenit:

$$43.\quad \alpha\left\{\begin{matrix}r-1, & s-1\\ t, & u\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}r-1, & t-1\\ u, & s\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}r-1, & u-1\\ s, & t\end{matrix}\right\}$$

$$+\alpha\left\{\begin{matrix}r, & s\\ t-1, & u-1\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}r, & t\\ u-1, & s-1\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}r, & u\\ s-1, & t-1\end{matrix}\right\}=0.$$

Quae formula, posito $r=n-1$ et posito $r=0$, cum termini, in quibus index n aut -1 obvenit, ommittendi sint, in has abit:

$$44.\quad \alpha\left\{\begin{matrix}n-1, & s-1\\ t, & u\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}n-1, & t-1\\ u, & s\end{matrix}\right\}+\alpha\left\{\begin{matrix}n-1, & u-1\\ s, & t\end{matrix}\right\}=0,$$

$$45.\quad \alpha\begin{Bmatrix}0, & s\\ t-1, & u-1\end{Bmatrix}+\alpha\begin{Bmatrix}0, & t\\ u-1, & s-1\end{Bmatrix}+\alpha\begin{Bmatrix}0, & u\\ s-1, & t-1\end{Bmatrix}=0.$$

Si numerorum s, t, u aliquis in (44.) ponitur 0, aut in (45.) ponitur n, prodit (41.). Alias formulas magis complicatas praetermittimus.

14.

Supra demonstravimus, quantitates $\alpha_{r,s}$ ita inter se comparatas esse, ut e systemate aequationum linearium (12.) sequantur aequationes (13.). Vice versa demonstrari potest, quaecunque sint $2n-1$ quantitates A_0, A_1, ... A_{2n-2}, e systemate aequationum linearium (13.) sequi aequationes (12.), in quibus coëfficientes $\alpha_{r,s}$ e $2n+2$ quantitatibus a_0, a_1, a_2, ... a_n atque b_0, b_1, b_2, ... b_n eadem ratione compositae sint atque antecedentibus supponitur et per formulam (5.) assignatur.

Primum, quod attinet quantitatem L, observo eam haberi per aequationem

$$L^{n-1}=A\begin{Bmatrix}0, 1, 2, \dots n-1\\ 0, 1, 2, \dots n-1\end{Bmatrix}.$$

Deinde quia in aequationibus (13.) coëfficientium series horizontales et verticales eaedem sunt, idem de aequationibus inversis (12.) valet, sive erit $\alpha_{r,s}=\alpha_{s,r}$. Porro vidimus propter naturam particularem aequationum linearium (13.), inter coëfficientes aequationum inversarum $\alpha_{r,s}$ haberi aequationem generalem (40.), quae pro $m=2$ abibat in hanc:

$$\alpha_{n-1,0}\,\alpha_{r,s}-\alpha_{n-1,s}\,\alpha_{r,0}=\alpha_{0,n-1}\,\alpha_{r+1,s-1}-\alpha_{0,s-1}\,\alpha_{r+1,n-1}.$$

Accipiamus iam quatuor quantitates a_n, b_n, a_0, b_0 tales, ut sit

$$(a_n b_0)=a_n b_0-a_0 b_n=\alpha_{n-1,0}=\alpha_{0,n-1},$$

e quarum igitur numero tres ex arbitrio eligi possunt. Quarum ope determinemus $2n-2$ quantitates a_1, a_2, ... a_{n-1} atque b_1, b_2, ... b_{n-1} per aequationes:

$$a_n b_1-b_n a_1=\alpha_{n-1,1},\quad a_n b_2-b_n a_2=\alpha_{n-1,1},\quad \dots\quad a_n b_{n-1}-b_n a_{n-1}=\alpha_{n-1,n-1},$$
$$a_0 b_1-b_0 a_1=-\alpha_{0,0},\quad a_0 b_2-b_0 a_2=-\alpha_{0,1},\quad \dots\quad a_0 b_{n-1}-b_0 a_{n-1}=-\alpha_{0,n-2}.$$

Quibus aequationibus substitutis in hanc supra exhibitam

$$\alpha_{n-1,0}\,\alpha_{r,s}-\alpha_{n-1,s}\,\alpha_{r,0}=\alpha_{0,n-1}\,\alpha_{r+1,s-1}-\alpha_{0,s-1}\,\alpha_{r+1,n-1},$$

atque divisione facta per

$$\alpha_{n-1,0}=\alpha_{0,n-1}=a_n b_0-a_0 b_n,$$

prodit haec

$$\alpha_{r,s}-\alpha_{r+1,s-1}=a_{r+1}b_s-a_s b_{r+1},$$

quae est aequatio (37.). Cuius ope e datis valoribus ipsarum $\alpha_{r,0}$, $\alpha_{r,n-1}$

valores omnium quantitatum $\alpha_{r,s}$ deducuntur, quales per aequationem (5.) dantur.

Datis duabus quibuslibet e quantitatibus a_0, a_1, ... a_n, duabus quibuslibet e quantitatibus b_0, b_1, ... b_n, reliquae per quantitates A_0, A_1, A_2, ... A_{2n-2} etiam resolutione aequationum (18.), (19.) obtineri possunt.

15.

Agamus adhuc de usu coëfficientium $\alpha_{r,s}$ in redactione fractionis $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in fractionem continuam. Statuatur enim

$$\begin{aligned} c_1 \varphi(x) - v_1 m_{n-1} &= u_1, \\ c_2 m_{n-1} - v_2 u_1 &= u_2, \\ c_3 u_1 - v_3 u_2 &= u_3, \\ \ldots \ldots \ldots \\ c_{n-1} u_{n-3} - v_{n-1} u_{n-2} &= u_{n-1}, \end{aligned}$$

ubi quantitates c_r designent constantes, v_r expressiones lineares, u_r expressiones ordinis $n-1-r$, ita ut postrema u_{n-1} sit constans; ad quas expressiones pervenis per divisionem continuam denominatoris per residuum. Aequationibus illis addatur tamquam prima:

$$b_n f(x) - a_n \varphi(x) = m_{n-1}.$$

Quo facto, ipsum u_r, eliminatis u_{r-1}, u_{r-2}, ... u_1, m_{n-1}, exhibere licet per aequationem,

$$u_r = P_r f(x) - Q_r \varphi(x),$$

ubi P_r, Q_r sunt expressiones integrae r^{ti} ordinis. Quae expressiones ea conditione, ut $P_r f(x) - Q_r \varphi(x)$ sit $n-1-r^{ti}$ ordinis, plane determinatae sunt, si factorem constantem excipis, per quem multiplicari possunt. Continent enim illae $2r+1$ constantes, si unam earum, quod licet, $=1$ ponis; quae eo determinatae sunt, quod in expressione $P_r f(x) - Q_r \varphi(x)$ coëfficientes dignitatum x^{n+r}, x^{n+r-1}, x^{n+r-2}, ... x^{n-r} evanescere debent, quod totidem $(2r+1)$ conditiones suggerit. In locum igitur divisionis continuae adhibere possumus aliam quamcunque methodum, quae nobis suggerit expressiones r^{ti} ordinis P_r, Q_r, quae expressionem $P_r f(x) - Q_r \varphi(x)$ $= u_r$ efficiant $(n-1-r)^{ti}$ ordinis.

Pervenimus ad eiusmodi expressiones P_r, Q_r, u_r, si aequationes lineares (2.) per methodum vulgarem resolvimus, eliminando successive x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, cet. Quas aequationes ordine inverso ita exhibeamus:

$$\begin{aligned}
a_{n-1,n-1}x^{n-1} + a_{n-1,n-2}x^{n-2} + a_{n-1,n-3}x^{n-3} \ldots + a_{n-1,0}x^0 &= m_{n-1},\\
a_{n-2,n-1}x^{n-1} + a_{n-2,n-2}x^{n-2} + a_{n-2,n-3}x^{n-3} \ldots + a_{n-2,0}x^0 &= m_{n-2},\\
a_{n-3,n-1}x^{n-1} + a_{n-3,n-2}x^{n-2} + a_{n-3,n-3}x^{n-3} \ldots + x_{n-3,0}x^0 &= m_{n-3},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_{0,n-1}x^{n-1} + a_{0,n-2}x^{n-2} + a_{0,n-3}x^{n-3} \ldots + a_{0,0}x^0 &= m_0.
\end{aligned}$$

E duabus primis eliminemus x^{n-1}, e tribus primis x^{n-1}, x^{n-2}, e quatuor primis x^{n-1}, x^{n-2}, x^{n-3}, et ita porro. Quo facto prodeunt aequationes:

$$\begin{aligned}
u_1 &= l_1 m_{n-1} + l_1' m_{n-2},\\
u_2 &= l_2 m_{n-1} + l_2' m_{n-2} + l_2'' m_{n-3},\\
u_3 &= l_3 m_{n-1} + l_3' m_{n-2} + l_3'' m_{n-3} + l_3''' m_{n-4},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_{n-1} &= l_{n-1} m_{n-1} + l_{n-1}' m_{n-2} + l_{n-1}'' m_{n-3} + \ldots + l_{n-1}^{(n-1)} m_0;
\end{aligned}$$

ubi quantitates $l_s^{(r)}$ sunt constantes, u_r autem expressiones $(n-1-r)^{ti}$ ordinis. Substituamus in his aequationibus loco ipsarum m_r earum valores

$$\begin{aligned}
m_{n-1} &= -b_n f(x) + a_n \varphi(x),\\
m_{n-2} &= -(b_n x + b_{n-1}) f(x) + (a_n x + a_{n-1})\varphi(x),\\
m_{n-3} &= -(b_n x^2 + b_{n-1} x + b_{n-2}) f(x) + (a_n x^2 + a_{n-1} x + a_{n-2})\varphi(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

obtinemus

$$\begin{aligned}
u_1 &= P_1 f(x) - Q_1 \varphi(x),\\
u_2 &= P_2 f(x) - Q_2 \varphi(x),\\
u_3 &= P_3 f(x) - Q_3 \varphi(x),\\
&\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

designantibus resp. P_1 et Q_1, P_2 et Q_2, P_3 et Q_3 cet. expressiones primi, secundi, tertii, cet. ordinis; quae indagandae erant.

Per eliminationem propositam habetur; notatione supra indicata adhibita,

$$\begin{aligned}
u_r = a\begin{Bmatrix} n-1, n-2, \ldots n-r-1 \\ n-1, n-2, \ldots n-r-1 \end{Bmatrix} x^{n-r-1} + a\begin{Bmatrix} n-1, n-2, \ldots n-r, n-r-1 \\ n-1, n-2, \ldots n-r, n-r-2 \end{Bmatrix} x^{n-r-2}\\
+ a\begin{Bmatrix} n-1, n-2, \ldots n-r, n-r-1 \\ n-1, n-2, \ldots n-r, n-r-3 \end{Bmatrix} x^{n-r-3} \ldots + a\begin{Bmatrix} n-1, n-2, \ldots n-r, n-r-1 \\ n-1, n-2, \ldots n-r, 0 \end{Bmatrix}.
\end{aligned}$$

Nec non per eandem notationem constantes $l_s^{(r)}$ ideoque etiam ipsae expressiones P_r, Q_r generaliter exhiberi possunt. Habetur ex. gr.

$$l_1 = -a_{n-1,n-1}, \qquad l_1' = a_{n-1,n-1},$$

$$l_2 = a\begin{Bmatrix} n-2, n-3 \\ n-1, n-2 \end{Bmatrix}, \qquad l_2' = a\begin{Bmatrix} n-3, n-1 \\ n-1, n-2 \end{Bmatrix}, \qquad l_2'' = a\begin{Bmatrix} n-1, n-2 \\ n-1, n-2 \end{Bmatrix},$$

cet. cet.

Expressiones u_r, quas antecedentibus ope quantitatum $\alpha_{r,s}$ generaliter determinavimus, ita comparatas esse novimus, ut inter tres quaslibet se proxime insequentes intercedit relatio,

$$c_r u_{r-2} - v_r u_{r-1} = u_r,$$

ubi c_r constans, v_r linearis. Quod ex ipsa expressione generali, quam pro u_r invenimus, non ita facile cognoscitur. Qua de causa rem alio modo aggrediamur.

16.

Expressiones u_r, P_r, Q_r etiam indagare licet ope aequationum

$$\begin{aligned}
L\; &= A_0 m_0 + A_1 m_1 + A_2 m_2 \ldots + A_{n-1} m_{n-1},\\
Lx &= A_1 m_0 + A_2 m_1 + A_3 m_2 \ldots + A_n\; m_{n-1},\\
Lx^2 &= A_2 m_0 + A_3 m_1 + A_4 m_2 \ldots + A_{n+1} m_{n-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Lx^{n-1} &= A_{n-1} m_0 + A_n m_1 + A_{n+1} m_2 \ldots + A_{2n-2} m_{n-1},
\end{aligned}$$

quae sunt inversae earum, a quibus §° antecedente profecti sumus. Nam e $(n-r)$ primis aequationum illarum eliminatis $n-r-1$ quantitatibus m_0, m_1, m_2, ... m_{n-r-2}, prodit expressio ipsius x ordinis $(n-r-1)^{ti}$ aequalis aggregato lineari expressionum m_{n-r-1}, m_{n-r}, ... m_{n-1}. Quod cum exprimi possit per $P_r f(x) - Q_2 \varphi(x)$, ubi P_r, Q_r sunt r^{ti} ordinis, proposito satisfactum est.

Antecedentibus nova patet proprietas systematis coëfficientium, quale in aequationibus linearibus (13.) invenitur. Sit enim $w_k = 0$ aequatio k^{ti} ordinis respectu ipsius x, quae provenit ex aequationibus,

$$\begin{aligned}
L\; &= A_0 m_0 + A_1 m_1 + A_2 m_2 \ldots + A_{k-1} m_{k-1},\\
Lx &= A_1 m_0 + A_2 m_1 + A_3 m_2 \ldots + A_k\; m_{k-1},\\
Lx^2 &= A_2 m_0 + A_3 m_1 + A_4 m_2 \ldots + A_{k+1} m_{k-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
Lx^k &= A_k m_0 + A_{k+1} m_1 + A_{k+2} m_2 \ldots + A_{2k-1} m_{k-1},
\end{aligned}$$

eliminatis m_0, m_1, m_2, ... m_{k-1}; si vocamus $w_{k-1} = 0$, $w_{k-2} = 0$ aequationes similes provenientes, si aequationum antecedentium omittimus postremam et terminos in m_{k-1} ductos, vel duas postremas et terminos in m_{k-1}, m_{k-2} ductos: intercedit inter tres expressiones w_{k-2}, w_{k-1}, w_k relatio

$$c\, w_{k-2} + v \,.\, w_{k-1} = w_k,$$

ubi c constans, v linearis.

Relatio antecedens locum habere debet per aequationes *identicas* inter quantitates A_r, per quas coëfficientes expressionum w_{k-2}, w_{k-1}, w_k

exhiberi licet; quippe quae quantitates A_r a se independentes sunt. Si vero coëfficientes illas per quantitates $\alpha_{r,s}$ exprimis, uti §° antec., eadem relatio non demonstrari poterit nisi adhibitis aequationibus quae inter quantitates $\alpha_{r,s}$ locum habent.

Statuamus, in expressione w_k coëfficientem altissimae potestatis x^k esse

$$A\begin{Bmatrix}0, 1, 2, \ldots\ldots k-1\\ 0, 1, 2, \ldots\ldots k-1\end{Bmatrix},$$

in qua expressione loco $A_{r,s}$ semper scribendum erit A_{r+s}. Quibus positis, erit

$$w_k = L^{k-1}.u_{n-1-k}.$$

Iam demonstremus, ex ipsa natura expressionum w_k, relationem assignatam inter tres se insequentes locum habere, et ipsam constantem c et expressionem linearem v indagemus.

Quod ut sine calculo nimis prolixo fiat, pono $k = n-1$; quo facto habetur

$$\frac{w_{n-1}}{L^{n-2}} = u_0 = m_{n-1},$$

$$\frac{w_{n-2}}{L^{n-3}} = u_1 = \alpha_{n-1,n-1}m_{n-2} - \alpha_{n-2,n-1}m_{n-1},$$

$$\frac{w_{n-3}}{L^{n-4}} = u_2 = \alpha\begin{Bmatrix}n-1, n-2\\ n-1, n-2\end{Bmatrix}m_{n-3} - \alpha\begin{Bmatrix}n-1, n-3\\ n-1, n-2\end{Bmatrix}m_{n-2} + \alpha\begin{Bmatrix}n-2, n-3\\ n-1, n-2\end{Bmatrix}m_{n-1}.$$

Porro advoco aequationem (38.), quae posito $r = n-2$, reiectoque termino m_n, in hanc abit:

$$0 = (a_{n-1}b_n)(m_{n-3} - xm_{n-2}) + (a_n b_{n-2})(m_{n-2} - xm_{n-1}) + (a_{n-2}b_{n-1})m_{n-1}.$$

Quam ope formularum

$$\alpha_{r-1,s} - \alpha_{r,s-1} = (a_r b_s), \qquad -\alpha_{r,n-1} = (a_r b_n)$$

etiam sic repraesentare licet:

$$0 = -\alpha_{n-1,n-1}(m_{n-3} - xm_{n-2}) + \alpha_{n-1,n-2}(m_{n-2} - xm_{n-1}) + (\alpha_{n-3,n-1} - \alpha_{n-2,n-2})m_{n-1}$$

sive

$$0 = xu_1 - \alpha_{n-1,n-1}m_{n-3} + \alpha_{n-1,n-2}m_{n-2} + (\alpha_{n-1,n-3} - \alpha_{n-2,n-2})m_{n-1}.$$

Statuamus brevitatis causa

$$\alpha_{n-1,n-1} = \beta, \qquad \alpha_{n-1,n-2} = \gamma, \qquad \alpha_{n-1,n-3} = \delta,$$
$$\alpha_{n-2,n-2} = \varepsilon, \qquad \alpha_{n-2,n-3} = \zeta,$$

erit

$$u_0 = m_{n-1}, \qquad u_1 = \beta m_{n-2} - \gamma m_{n-1},$$
$$u_2 = [\beta\varepsilon - \gamma^2]m_{n-3} + [\gamma\delta - \beta\zeta]m_{n-2} + [\gamma\zeta - \delta\varepsilon]m_{n-1},$$
$$0 = xu_1 - \beta m_{n-3} + \gamma m_{n-2} + (\delta - \varepsilon)m_{n-1}.$$

Aequatio postrema fit, eliminata m_{n-3},

$$0 = [\beta\varepsilon-\gamma^2]xu_1-\beta u_2+[\gamma(\beta\varepsilon-\gamma^2)+\beta(\gamma\delta-\beta\zeta)]m_{n-2}$$
$$+[(\delta-\varepsilon)(\beta\varepsilon-\gamma^2)+\beta(\gamma\zeta-\delta\varepsilon)]m_{n-1}.$$

Coëfficientem ipsius m_{n-1} ita exhibere licet,

$$-\varepsilon(\beta\varepsilon-\gamma^2)-\gamma(\gamma\delta-\beta\zeta),$$

unde aequatio antecedens fit

$$0 = [(\beta\varepsilon-\gamma^2)x+\gamma\delta-\beta\zeta]u_1-\beta u_2+(\beta\varepsilon-\gamma^2)[\gamma m_{n-2}-\varepsilon m_{n-1}].$$

Unde tandem, multiplicatione per β facta et ipsis m_{n-2}, m_{n-1} per u_1, u_0 exhibitis, nanciscimur:

$$0 = -\beta^2u_2+[(\beta\varepsilon-\gamma^2)(x+\gamma)+\beta(\gamma\delta-\beta\zeta)]u_1-(\beta\varepsilon-\gamma^2)^2u_0.$$

Quae docet formula, restitutis ipsarum β, γ cet. valoribus, expressionem

$$a^2_{n-1,\,n-1}u_2+\left\{\alpha\begin{bmatrix}n-1,\,n-2\\n-1,\,n-2\end{bmatrix}\right\}^2u_0$$

per u_1 divisibilem esse; sive, quod idem est, expressionem

$$\left\{A\begin{bmatrix}0,1,2,\dots\, n-2\\0,1,2,\dots\, n-2\end{bmatrix}\right\}^2w_{n-3}+\left\{A\begin{bmatrix}0,1,2,\dots\, n-3\\0,1,2,\dots\, n-3\end{bmatrix}\right\}^2w_{n-1}$$

divisibilem esse per w_{n-2}. Unde posito k loco $n-1$, si loco $A\begin{Bmatrix}0,1,2,\dots\, k\\0,1,2,\dots\, k\end{Bmatrix}$ restituimus expressionem $\Sigma\pm A_{0,0}A_{1,1}A_{1,2}\dots A_{k,k}$, in quo aggregato loco $A_{r,s}$ scribendum erit A_{r+s} atque terminus

$$A_{0,0}A_{1,1}A_{2,2}\dots A_{k,k}=A_0A_2A_4\dots A_{2k},$$

positive accipiendus, sequitur theorema algebraicum hoc.

Theorema.

„*Sit* $w_k=0$ *aequatio* k^{ti} *ordinis respectu ipsius* x, *quae provenit e* $k+1$ *aequationibus*

$$\begin{aligned}L\;\; &= A_0m_0+A_1m_1+\dots+A_{k-1}m_{k-1},\\ Lx &= A_1m_0+A_2m_1+\dots+A_k\;m_{k-1},\\ Lx^2 &= A_2m_0+A_3m_1+\dots+A_{k+1}m_{k-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ Lx^k &= A_km_0+A_{k+1}m_1+\dots+A_{2k-1}m_{k-1},\end{aligned}$$

eliminatis k *quantitatibus* $m_0, m_1, \dots m_{k-1}$; *si ipsius* w_k *potestas altissima* x^k *coëfficientem habet* $\Sigma\pm A_{0,0}A_{1,1}\dots A_{k-1,k-1}$, *erit expressio*

$$[\Sigma\pm A_{0,0}A_{1,1}\dots A_{k-2,k-2}]^2w_k+[\Sigma\pm A_{0,0}A_{1,1}\dots A_{k-1,k-1}]^2w_{k-2}$$

per w_{k-1} *divisibilis.*"

De hoc theoremate statim fluit sequens:

„*notatione* §[1] *antecedentis adhibita, fieri*

$$\left\{\alpha\begin{bmatrix} n-1, n-2, \dots n-r \\ n-1, n-2, \dots n-r \end{bmatrix}\right\}^2 u_r + \left\{\alpha\begin{bmatrix} n-1, n-2, \dots n-r-1 \\ n-1, n-2, \dots n-r-1 \end{bmatrix}\right\}^2 u_{r-2}$$

per u_{r-1} *divisibilem.*"

Unde

$$c_r = -\left\{\frac{\alpha\begin{bmatrix} n-1, n-2, \dots n-r-1 \\ n-1, n-2, \dots n-r-1 \end{bmatrix}}{\alpha\begin{bmatrix} n-1, n-2, \dots n-r \\ n-1, n-2, \dots n-r \end{bmatrix}}\right\}^2.$$

Quotientes lineares facile obtinentur e terminis sive primis sive postremis expressionum u_r aut w_r.

Addam relationem, quae adhuc desideratur, inter $\varphi(x)$, m_{n-1}, u_1. Habetur e (35.):

$$m_{n-2} - x \cdot m_{n-1} = a_{n-1}\varphi(x) - b_{n-1}f(x).$$

Unde, cum sit

$$m_{n-1} = a_n\varphi(x) - b_n f(x),$$

fit:

$$b_n m_{n-2} - [b_n x + b_{n-1}] m_{n-1} = (a_{n-1} b_n)\varphi(x) = -\alpha_{n-1,n-1}\varphi(x).$$

Eliminata m_{n-2} ope aequationis

$$u_1 = \alpha_{n-1,n-1} m_{n-2} - \alpha_{n-1,n-2} m_{n-1},$$

prodit

$$b_n u_1 + \alpha^2_{n-1,n-1}\varphi(x) = [\alpha_{n-1,n-1}(b_n x + b_{n-1}) - b_n \alpha_{n-1,n-2}] m_{n-1}.$$

Unde iam habentur formulae omnes pro evolutione fractionis $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ in fractionem continuam.

Regiomonti d. 27. Aug. 1835.

7.

Zur Theorie der Eingehüllten, Einhüllungs-Flächen, ihrer Characteristiken und Wendungs-Curven.

(Vom Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

Stellt

$$1.\qquad F(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0$$

die auf rechtwinklige Coordinaten-Achsen x, y, z bezogene Gleichung einer Fläche dar, wo a eine willkürliche Constante und $\varphi(a)$ eine willkürliche Function dieser Constante bedeutet, so ist das Resultat der Elimination von a aus dieser und der Gleichung

$$2.\qquad \frac{d.F(x, y, z, a, \varphi(a))}{da} = 0$$

die Gleichung der Einhüllungsfläche aller in (1.) durch die Variabilität von a entstehenden eingehüllten Flächen.

Analytisch betrachtet stellt diese resultirende Gleichung das singuläre Integral jener Differenzialgleichung dar, von der die Gleichung (1.) das vollständige Integral ist.

Läfst man hingegen in den beiden Gleichungen (1.) und (2.) die Gröfse a als willkürliche Constante stehen, so repräsentiren sie die Curve, in der sich zwei auf einander folgende eingehüllte Flächen durchschneiden, welche Curve nach Monge die dem Werthe von a entsprechende Characteristik genannt wird.

Differenziirt man ferner die zwei Gleichungen der Characteristik nach a, so hat man aufser der Gleichung (2.) noch folgende:

$$3.\qquad \frac{d^2 F(x, y, z, a, \varphi(a))}{da^2} = 0,$$

welche, mit (1.) und (2.) durch Elimination von a verbunden, die Wendungscurve vorstellt.

Es steht somit diese Wendungscurve zu den Characteristiken in derselben Beziehung, wie die Einhüllungsfläche zu den eingehüllten Flächen; oder derselben Differenzialgleichung, welcher die Gleichungen der Wendungscurve als singuläres Integral entsprechen, genügen die Gleichungen der Characteristik als vollständiges Integral.

Der gröfsern Deutlichkeit wegen will ich die Differenzialgleichung der Characteristik und Wendungscurve folgender eingehüllten Fläche

$$a)\qquad (x-a)^2 + (y-\varphi(a))^2 + z^2 - 1 = 0$$

suchen. Differenziirt man dieselbe nach α, so ist:

$$b) \quad x-\alpha+(y-\varphi(\alpha))\frac{d.\varphi(\alpha)}{d\alpha}=0.$$

Diese zwei Gleichungen, in denen α als constant behandelt werden muſs, stellen die Characteristik dar. Die Differenzialgleichung derselben wird gefunden, wenn man die letzten zwei Gleichungen nach x, y, z differenziirt und α als constant behandelt, so daſs

$$c) \quad (x-\alpha)dx+(y-\varphi(\alpha))dy+z\,dz=0, \qquad dx+\frac{d.\varphi(\alpha)}{d\alpha}dy=0.$$

Wenn aus diesen vier Gleichungen α, $\varphi(\alpha)$, $\frac{d.\varphi(\alpha)}{d\alpha}$ eliminirt werden, so hat man:

$$d) \quad z^2(dx^2+dy^2+dz^2)=dx^2+dy^2,$$

als Differenzialgleichung der Characteristik.

Ferner findet man die Gleichungen der Wendungscurve, wenn man aus den beiden Gleichungen (a) und (b) und aus der folgenden

$$e) \quad 1+\left(\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}\right)^2-(y-\varphi(\alpha))\frac{d^2\varphi(\alpha)}{d\alpha^2}=0.$$

die Constante α eliminirt.

Um die Differenzialgleichung dieser Curve zu finden, denke man sich aus der letzten Gleichung α als Function von y bestimmt und in die Gleichungen (a) und (b) substituirt. Werden nun diese zwei Gleichungen unter der eben gemachten Voraussetzung differenziirt, so hat man, mit Berücksichtigung der Gleichungen (b) und (e), und unter der Annahme, daſs $\frac{d\alpha}{dy}$, aus Gleichung (e) bestimmt, nicht unendlich groſs wird, die obigen zwei Gleichungen (c), welche in Verbindung mit (a) und (b) durch Elimination von α, $\varphi(\alpha)$, $\frac{d\varphi(\alpha)}{d\alpha}$ auf die Gleichung (d) führen, die demnach auch Differenzialgleichung der Wendungscurve ist.

Da dieselbe Betrachtung auch auf die allgemeinen Gleichungen (1.), (2.), (3.) angewendet werden kann, so ist man zu dem Schlusse berechtigt, daſs die allgemeinste Differenzialgleichung der Characteristik zugleich Differenzialgleichung der Wendungscurve ist, und umgekehrt.

Die mir bekannten Schriften, welche diesen Gegenstand behandeln, unterscheiden die Differenzialgleichung der Wendungscurve von der der Characteristik: allein der Unterschied ist nur scheinbar, indem eine Differenzialgleichung wie (d) durch eine unendliche Anzahl von Gleichungspaaren ersetzt werden kann.

Zürich den 7. August 1835.

8.

Über die hypergeometrische Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}x^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$

(Von Herrn *E. E. Kummer*, Dr. phil. zu Liegnitz.)

(Fortsetzung von No. 3. des vorigen Hefts.)

Abschnitt IV.

Umformungen der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für den noch specielleren Fall, wo von den Quantitäten α, β, und γ nur eine noch beliebig bleibt.

§. 21.

So wie im vorigen Abschnitte etwas von der Allgemeinheit der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aufgegeben und unter den Quantitäten α, β, γ eine Bedingungsgleichung gesetzt wurde, wodurch wir eine sehr große Anzahl neuer, wenn auch specieller Gleichungen unter verschiedenen Functionen F erhalten haben: eben so soll in dem gegenwärtigen Abschnitte nun noch mehr von der Allgemeinheit der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ aufgegeben werden, indem zwei Bedingungsgleichungen unter den Quantitäten α, β, γ gesetzt werden, oder nur eine derselben als beliebig beibehalten wird. Wenn dieser Fall eben so als der vorige behandelt wird, so zerfällt jetzt die Gleichung (4.) §. 4. (deren algebraischen particulären Integrale die Werthe des z geben) in drei besondere Gleichungen, welche mit einander identisch sein müssen. Eine Discussion der in diesen drei Gleichungen enthaltenen speciellen Fälle würde sich auf ähnliche Weise wie im vorigen Abschnitte ausführen lassen: die Anzahl der Werthe des z aber würde für diesen Fall außerordentlich groß sein, und die Aufgabe, diese Werthe des z zu finden, die ihnen zugehörigen particulären Integrale der Differenzialgleichung (1.) §. 4. und die aus diesen entspringenden Gleichungen zu bilden, würde zu allzugroßen Weitläuftigkeiten führen, und dennoch keine wesentlich neuen Gleichungen gewähren. Wir wollen uns

daher hier nur darauf beschränken, diejenigen Gleichungen, welche sich aus denen der beiden vorhergehenden Abschnitte für den gegenwärtigen Fall entwickeln lassen, aufzustellen, und zwar auch von diesen nur die, welche unter zweien Functionen F statt haben.

Die Methode, diese Gleichungen aufzufinden, ist folgende. Man nimmt in je zweien der Gleichungen (42.) bis (66.) des §. 19. unter den Gröfsen α und β, oder, wo sie vorkommen, unter den Gröfsen α und γ eine Bedingungsgleichung von der Art an, dafs die Functionen F links vom Gleichheitszeichen mit einander identisch werden, weil sodann die Theile rechts vom Gleichheitszeichen auch einander gleich sein müssen. Alsdann gewähren diese allemal eine Gleichung für den gegenwärtigen Fall. Von den Gleichungen aber, welche man auf diese Weise erhält, erweisen sich viele, welche anfangs verschieden zu sein schienen, bei näherer Untersuchung als mit einander identich; andere Gleichungen dieser Art gehören ferner nicht transcendenten Reihen F an, sondern solchen, welche sich algebraisch oder durch Kreisfunctionen ausdrücken lassen. Diese alle übergehend, nehme ich nur folgende neun Gleichungen, in welchen x in r verwandelt ist:

1. $$\left(1-\frac{r}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{r}{2-r}\right)^2\right)$$
$$=(1+r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

2. $$\left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2\right)$$
$$=(1+r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

3. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{r}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{r}{2-r}\right)^2\right),$$

4. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2\right),$$

5. $$(1+r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r}{(1+r)^2}\right)$$
$$=(1-2r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

6. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right)$$
$$=(1-2r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

7. $$\left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\sqrt{(1-r)}-1}{\sqrt{(1-r)}+1}\right)$$
$$=(1+r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{4r}{(1+r)^2}\right),$$

8. $$(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{2\sqrt{r}}{1+\sqrt{r}}\right)$$
$$=(1-2r)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{4r^2-4r}{4r^2-4r+1}\right),$$

9. $$\left(\frac{1+\sqrt{(1-r)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\sqrt{(1-r)}-1}{\sqrt{(1-r)}+1}\right)$$
$$=(1+\sqrt{r})^{-2\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{2},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{4\sqrt{r}}{(1+\sqrt{r})^2}\right).$$

Die Gleichung (1.) erhält man aus (50.) und (52.), wenn daselbst $\beta=\frac{\alpha+1}{3}$ genommen wird; eben so (2.) aus (50.) und (43.); (3.) aus (51.) und (52.); (4.) aus (51.) und (43.); (5.) aus (50.) und (55.), und (6.) aus (51.) und (55.). Die Gleichung (7.) erhält man aus (45.) und (50.), indem $\beta=\frac{1}{4}$ genommen wird; ferner (8.) aus (44.) und (45.), indem $\gamma=\alpha+\frac{3}{4}$, $\beta=\alpha+\frac{1}{2}$ gesetzt wird, und endlich (9.) aus (45.) und (51.), wenn in denselben $\beta=\frac{1}{4}$ gesetzt wird.

Diese neun Formeln nehmen folgende bequemere Gestalt an:

10. $$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm3\sqrt{x})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{x}(1\pm\sqrt{x})}{(1\pm3\sqrt{x})^2}\right),$$

11. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=(1\pm6\sqrt{x}+x)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{x}(1\pm\sqrt{x})^2}{(1\pm6\sqrt{x}+x)^2}\right),$$

12. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{2-x+6\sqrt{(1-x)}}{8}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{(1-\sqrt{(1-x)})^4}{(2-x+6\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

13. $$F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt[4]{(1-x)}}{2}\right)^{-4\alpha}F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{1-\sqrt[4]{(1-x)}}{1+\sqrt[4]{(1-x)}}\right)^4\right),$$

$$14.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{3\sqrt{(1-x)}-1}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{-8\sqrt{(1-x)}(\sqrt{(1-x)}-1)}{(3\sqrt{(1-x)}-1)^2}\right),$$

$$15.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{x-2+6\sqrt{(1-x)}}{4}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{16\sqrt{(1-x)}(\sqrt{(1-x)}-1)^2}{(x-2+6\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

$$16.\quad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1-6x+x^2)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16x(1+x)^2}{(1-6x+x^2)^2}\right),$$

$$17.\quad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},x)$$
$$=\left(\frac{4-4x-x^2}{4}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{-16x^2(1-x)}{(4-4x-x^2)^2}\right),$$

$$18.\quad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1\pm\sqrt{(1-x)})^{-4\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\pm8(1-x)\sqrt{(1-x)}}{(1\pm\sqrt{(1-x)})^4}\right).$$

Wenn man nämlich in (1.) setzt $\left(\frac{r}{2-r}\right)^2=x$, so erhält man (10.); wenn man in (2.) setzt $\left(\frac{1-\sqrt{(1-r)}}{1+\sqrt{(1-r)}}\right)^2=x$, so erhält man (11.); und auf ähnliche Weise die übrigen hier aufgestellten Formeln.

Werden nun in diesen Gleichungen die Functionen F rechts vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.) §. 9. umgeformt, so erhält man folgende acht andere Gleichungen:

$$19.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm\sqrt{x})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{x}(1\mp\sqrt{x})}{(1\pm\sqrt{x})^2}\right),$$

$$20.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1\pm\sqrt{x})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{x}(1\mp\sqrt{x})^2}{(1\pm\sqrt{x})^4}\right),$$

$$21.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{-(1-\sqrt{(1-x)})^4}{16\sqrt{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

$$22.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{-(1-\sqrt{(1-x)})^4}{8\sqrt{(1-x)}(1+\sqrt{(1-x)})}\right),$$

$$23.\qquad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{8\sqrt{(1-x)}(1-\sqrt{(1-x)})}{(1+\sqrt{(1-x)})^2}\right),$$

$$24.\qquad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},x\right)$$
$$=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{16\sqrt{(1-x)}(1-\sqrt{(1-x)})^2}{(1+\sqrt{(1-x)})^4}\right).$$

$$25.\qquad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1+x)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x(1-x)^2}{(1+x)^4}\right),$$

$$26.\qquad F(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},x)$$
$$=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}\right).$$

Werden endlich noch die Functionen F links vom Gleichheitszeichen nach Formel (18.) §. 9. umgeformt, und wird x in $\frac{x}{x-1}$ verwandelt, so erhält man aus (10.), (11.), (16.), (18.), (19.), (20.), (23.) und (25.) noch folgende acht Formeln:

$$27.\qquad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm3\sqrt{(-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{(-x)}(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})}{(\sqrt{(1-x)}\pm3\sqrt{(-x)})^2}\right),$$

$$28.\qquad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(1-2x\pm6\sqrt{(x^2-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{(x^2-x)}(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^2}{(1-2x\pm6\sqrt{(x^2-x)})^2}\right),$$

$$29.\qquad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(1+4x-4x^2)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},\frac{16x(1-x)}{(1+4x-4x^2)^2}\right),$$

$$30.\qquad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{3}{4},x)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{x})^{-4\alpha}F\left(\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{\pm8\sqrt{(x-x^2)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{x})^4}\right).$$

$$31.\qquad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm8\sqrt{(-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^3}\right),$$

$$32.\qquad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},x\right)$$
$$=(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{\pm16\sqrt{(x^2-x)}}{(\sqrt{(1-x)}\pm\sqrt{(-x)})^6}\right),$$

$$33.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+3}{3},x\right)=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},\frac{-8x}{(1+\sqrt{(1-x)})^3}\right),$$

$$34.\quad F(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{1}{2},x)=(1-2x)^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{-16x(1-x)}{(1-2x)^4}\right),$$

§. 22.

In allen diesen Formeln haben die letzten Elemente der Functionen F rechts vom Gleichheitszeichen verschiedene Werthe; es ist leicht, aus diesen noch viele andere Formeln derselben Art herzuleiten, welche jedoch dieselben Werthe des letzten Elementes haben, indem man nämlich die eine oder die andere Function F dieser Formeln, oder auch beide zugleich, nach Formel (17.) §. 9. umformt; es würde jedoch zu weitläuftig sein, diese Umformungen hier aufzunehmen. Alle diese Formeln sind ferner nur in bestimmten Grenzen des x gültig, weil die letzten Elemente dieser Functionen, von dem Werthe 0 an, nur bis -1 auf der einen, und $+1$ auf der andern Seite ausgedehnt werden dürfen: sobald aber das letzte Element für einen Werth des x die Grenze -1 oder $+1$ erreicht hat, darf x nicht gröfser angenommen werden, wenn auch das letzte Element der andern Function dadurch wieder kleiner würde. So z. B. die Gleichung (26.) ist gültig in den Grenzen $x=-1$ bis $x=2\sqrt{2}-2$; denn für den letzteren Werth des x erreicht $z=\frac{16x^2(1-x)}{(2-x)^4}$ zuerst die Grenze $+1$: nimmt man x etwas gröfser, so wird dadurch zwar z wieder kleiner als 1, aber die Gleichung (26.) hört auf, richtig zu sein. Nach derselben Methode, welche im vorigen Abschnitte zur Bildung der Gleichungen unter dreien Functionen F angewendet worden ist, können nun auch in diesem Falle aus den gefundenen Gleichungen unter zweien Functionen F, die Gleichungen unter dreien Functionen gebildet werden; aber auch diese wollen wir Kürze halber übergehen.

Nachdem nun die drei Fälle durchgegangen worden sind: erstens, wo α, β, γ von einander ganz unabhängig waren: zweitens, wo eine Bedingungsgleichung unter denselben statt fand, und drittens, wo zwei Bedingungsgleichungen statt fanden, so wäre nun noch viertens der Fall zu untersuchen, wo drei Bedingungsgleichungen unter denselben statt haben, oder wo diese Quantitäten α, β, γ bestimmte Werthe haben. Dieser Fall würde gewifs zu sehr interessanten Resultaten führen, da unter denselben zum Beispiel alle Verwandlungen der ganzen elliptischen Integrale,

so wie mehrerer unbestimmter elliptischer Integrale enthalten sein müfsten, (denn diese sind, wie bald gezeigt werden soll, als specielle Fälle in der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ enthalten); aber abgesehen von der Schwierigkeit, diesen speciellsten Fall vollständig zu erschöpfen, würde er sich auch zu sehr von der allgemeinen Untersuchung der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entfernen; weshalb er für jetzt übergangen werden soll.

Abschnitt V.

Summation der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für specielle Werthe des letzten Elementes x.

§. 23.

Da wir die Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, deren Haupt-Eigenschaften in den vorhergehenden drei Abschnitten entwickelt worden sind, durch eine unendliche Reihe definirt haben, so kann auch von einer Summe derselben die Rede sein, welche nichts anderes sein wird, als ein Ausdruck dieser Reihe durch bekannte Functionen. Im allgemeinen ist nun die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ eine Transcendente eigener Art; in vielen speciellen Fällen aber läfst sie sich auf bekannte Functionen reduciren. Hierbei sind zunächst zwei Fälle zu unterscheiden: man kann nämlich die Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ suchen für specielle Werthe des letzten Elementes x, wie sie z. B. von Gaufs für den Fall $x=1$ gefunden worden ist: oder man kann die Summe dieser Reihe suchen, indem x als veränderlich beibehalten wird, für bestimmte Werthe der Quantitäten α, β, γ. Wir werden uns in diesem Abschnitte nur auf den ersten jener beiden Fälle beschränken, und was den zweiten Fall betrifft, so werden wir in dem folgenden Abschnitte untersuchen, unter welchen Bedingungen die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ sich durch elliptische Transcendenten ausdrücken läfst; die zahlreichen Summationen aber, welche algebraisch oder durch logarithmische und Kreisfunctionen ausgeführt werden können, (für welche Gaufs in der erwähnten Abhandlung eine Sammlung gegeben hat), übergehen wir ganz, da die gegenwärtige Abhandlung nur die Theorie der höheren Transcendenten zum Zwecke hat.

Um nun die Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für bestimmte Werthe des x zu finden, werden wir von dem Werthe $x=1$ ausgehen, für wel-

chen, wie schon erwähnt worden, die Summe der Reihe durch die Transcendente Π von Gaufs gefunden worden ist. Durch Umformungen der Reihe, deren letztes Element gleich 1 ist, werden wir sodann Reihen mit anderen Werthen des letzten Elementes finden, welche sich also ebenfalls durch die Function Π müssen summiren lassen.

Setzt man in Formel (53.) §. 19. $x=-1$, so ist:

$$F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1)=2^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha-2\beta+1}{2},\alpha-\beta+1,1\right),$$

und wenn die Function F, rechts vom Gleichheitszeichen, deren letztes Element 1 ist, nach der allgemeinen Formel

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1)=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

durch die Function Π ausgedrückt wird, so ist:

$$1.\qquad F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1)=\frac{2^{-\alpha}\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\beta)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)}.$$

Setzt man ferner in Formel (57.) §. 19. $x=\frac{1}{2}$, so wird:

$$F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2},1\right);$$

also wenn die Function F, deren letztes Element 1 ist, durch die Function Π ausgedrückt wird:

$$2.\qquad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}.$$

Diese Summation geht auch unmittelbar aus (73.) oder (74.) §. 20. hervor, wenn daselbst $x=0$ gesetzt wird.

Setzt man endlich in Formel (66.) §. 19. $x=\frac{1}{2}$, so ist:

$$F(\alpha,1-\alpha,\gamma,\tfrac{1}{2})=2^{1-\gamma}F\left(\frac{\gamma-\alpha}{2},\frac{\gamma+\alpha-1}{2},\gamma,1\right),$$

und daher

$$3.\qquad F(\alpha,1-\alpha,\gamma,\tfrac{1}{2})=\frac{2^{1-\gamma}\sqrt{\pi}\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi\left(\frac{\gamma-\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\gamma+\alpha-2}{2}\right)}.$$

§. 24.

Aufser diesen drei Summationen der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für die Werthe $x=-1$ und $x=\frac{1}{2}$, wobei noch zwei der Quantitäten α, β, γ beliebig bleiben, gewähren die Formeln des dritten Abschnittes keine anderen derselben Art; indessen können diese noch verallgemeinert werden.

Im allgemeinen hat nämlich Gaufs l. c. pag. 11 von den drei Functionen $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, $F(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu,x)$ und $F(\alpha+\lambda',\beta+\mu',\gamma+\nu',x)$, in welchen λ, μ, ν, λ', μ', ν' beliebige ganze, positive oder negative Zahlen bedeuten, gezeigt, dafs aus zweien derselben die dritte durch Reductionsformeln hergeleitet werden kann. Setzt man nun in Gleichung (1.) $\alpha+1$ statt α, so ist:

$$F(\alpha+1,\beta,\alpha-\beta+2,-1)=\frac{2^{-\alpha-1}\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\beta+1)}{\Pi\left(\frac{\alpha-2\beta+1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Aus $F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+1,-1)$ und $F(\alpha+1,\beta,\alpha-\beta+2,-1)$ kann man aber nach dem angeführten Satze $F(\alpha,\beta,\alpha-\beta+k,-1)$ herleiten, wo k irgend eine beliebige ganze Zahl bedeutet; und deshalb läfst sich auch diese allgemeinere Reihe durch die Function Π summiren. Eben so aus dem gefundenen Ausdrucke für $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\frac{1}{2}\right)$, wenn $\alpha+1$ statt α und $\beta+1$ statt β gesetzt wird, erhält man auch $F\left(\alpha+1,\beta+1,\frac{\alpha+\beta+1}{2}+1,\frac{1}{2}\right)$ und aus diesen beiden vermittelst der Reductionsformeln $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+k}{2},\frac{1}{2}\right)$. Auf dieselbe Weise leitet man auch aus $F(\alpha,1-\alpha,\gamma,\frac{1}{2})$ die allgemeinere Reihe $F(\alpha,k-\alpha,\gamma,\frac{1}{2})$ ab. Hieraus folgt: erstens, die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,-1)$ läfst sich durch die Function Π summiren, wenn $\gamma-\alpha+\beta$ oder $\gamma-\beta+\alpha$ eine ganze Zahl ist; zweitens, die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{2})$ läfst sich durch die Function Π summiren, wenn $2\gamma-\alpha-\beta$ oder $\alpha+\beta$ eine ganze Zahl ist.

§. 25.

So wie die Formeln des dritten Abschnittes diese Summationen gegeben haben: eben so geben die Formeln des vierten Abschnittes einige speciellere Summationen, bei welchen nur noch eine der Quantitäten α, β, γ beliebig bleibt.

In Formel (19.) §. 21. gesetzt $x=\frac{1}{9}$, giebt:

$$4.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+5}{6},\frac{1}{9}\right)=\left(\tfrac{3}{4}\right)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (20.) gesetzt $x=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2$, giebt:

$$5.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+5}{6},\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^2\right)=(4-2\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (23.) gesetzt $x=\frac{8}{9}$, giebt:

$$6.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{2},\frac{2\alpha+2}{3},\tfrac{8}{9}\right)=(\tfrac{1}{3})^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (24.) gesetzt $x=\frac{4\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}$, giebt:

$$7.\quad F\left(\alpha,\frac{4\alpha+1}{6},\frac{4\alpha+1}{3},\frac{4\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})^2}\right)=(2-\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (31.) gesetzt $x=-\frac{1}{8}$, giebt:

$$8.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2-\alpha}{6},\frac{2\alpha+5}{6},-\tfrac{1}{8}\right)=2^{-\frac{\alpha}{2}}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (32.) gesetzt $x=-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4\sqrt{2}}$, giebt:

$$9.\quad F\left(\alpha,\frac{2-\alpha}{3},\frac{2\alpha+5}{6},-\frac{(\sqrt{2}-1)^2}{4\sqrt{2}}\right)=2^{-\frac{\alpha}{2}}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right);$$

in (25.) gesetzt $x=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, giebt:

$$10.\quad F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},\alpha+\tfrac{1}{4},\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)=(4-2\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{1}{4},1\right);$$

in (26.) gesetzt $x=\frac{2}{\sqrt{2}+1}$, giebt:

$$11.\quad F\left(2\alpha,\alpha+\tfrac{1}{4},2\alpha+\tfrac{1}{2},\frac{2}{\sqrt{2}+1}\right)=(2-\sqrt{2})^{-2\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{1}{4},1\right);$$

in (34.) gesetzt $x=\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, giebt:

$$12.\quad F\left(2\alpha,\tfrac{1}{2},\alpha+\tfrac{1}{4},\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)=2^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{1}{4},1\right).$$

Für die beiden Reihen, welche hier rechts vom Gleichheitszeichen vorkommen: $F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right)$ und $F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\frac{1}{4},1\right)$, darf man nur ihre Ausdrücke durch die Function Π setzen, nämlich:

$$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\alpha+1}{6},\frac{2\alpha+2}{3},1\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{2\alpha-1}{3}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\alpha-2}{6}\right)},$$

$$F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{2\alpha+1}{4},\alpha+\tfrac{1}{4},1\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\alpha-\frac{1}{4})}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{2\alpha-1}{4}\right)},$$

so erhält man diese neun Reihen durch die Function Π summirt. Man kann auch die Reihen links vom Gleichheitszeichen in diesen Formeln nach Gleichung (17.) §. 9. umformen, und wird dadurch neun andere Summationen erhalten, bei welchen jedoch die letzten Elemente der summirten Reihen dieselben sind, wie in (4.) bis (12.). Übrigens ist klar, daſs

alle hier gefundenen Summationen sich eben so durch willkürliche ganze Zahlen verallgemeinern lassen, wie die des vorigen Paragraphs, oder, was dasselbe ist: es lassen sich, da diese einmal gefunden sind, auch alle diejenigen Reihen summiren, welche vermittelst der Reductionsformeln aus jenen abgeleitet werden können.

Die Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes gewähren ebenfalls eine große Anzahl noch speciellerer Summationen für den Fall, dafs von den Quantitäten α, β, γ keine mehr beliebig bleibt; von diesen mag es hinreichen, ein einziges merkwürdiges Beispiel zu geben.

Setzt man in (45.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$, so wird:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x)=\left(\frac{1+\sqrt{(1-x)}}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{\sqrt{(1-x)}+1}\right),$$

setzt man ferner:

$$\frac{\sqrt{(1-x)}-1}{\sqrt{(1-x)}+1}=x',\qquad \frac{\sqrt{(1-x')}-1}{\sqrt{(1-x')}+1}=x'',\qquad \frac{\sqrt{(1-x'')}-1}{\sqrt{(1-x'')}+1}=x''' \text{ etc.},$$

so erhält man folgende Reihe von Gleichungen:

$$13.\quad \begin{cases} F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x\;)=\sqrt{(1-x'\;)}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'\;),\\ F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'\,)=\sqrt{(1-x''\,)}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\tfrac{5}{4},x''\,),\\ F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'')=\sqrt{(1-x''')}\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x'''),\\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenn man nun für irgend einen Werth des x die Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ summiren kann, so wird man vermittelst dieser Gleichungen daraus auch die Summe derselben Reihe für die entsprechenden Werthe x', x'', x''', etc. ableiten können. Es ist nun aber für $x=1$

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},1)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})},$$

und die dem $x=1$ entsprechenden Werthe von x', x'', x''', etc. sind:

$$x'=-1,\qquad x''=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1},\qquad x'''=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{(1+\sqrt{2})}}{\sqrt{2}+\sqrt{(1+\sqrt{2})}},\quad \text{etc.}$$

Für alle diese Werthe des letzten Elementes läfst sich also die Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ summiren.

Die Function $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ hat, wie man aus den Gleichungen (13.) ersieht, die merkwürdige Eigenschaft, dafs sich eine unendliche Reihe solcher Functionen bilden läfst, welche in bestimmten Verhältnissen zu einander stehen. Dies erinnert an die Eigenschaften der elliptischen Integrale, und es wird auch wirklich in dem folgenden Abschnitte gezeigt werden, dafs die Function $F(\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{5}{4},x)$ sich durch ein elliptisches Inte-

gral der ersten Gattung ausdrücken läfst. Denkt man sich die Reihe der Gleichungen bei (13.) bis in's unendliche fortgesetzt und alle diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man folgende Entwickelung in ein Product unendlich vieler Factoren:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x)=\sqrt{((1-x')(1-x'')(1-x''')\dots \text{ in inf.})},$$

welches, weil die Gröfsen x', x'', x''', etc. sich rasch der Grenze 0 nähern, recht gut convergirt.

Abschnitt VI.

Anwendungen der gefundenen Formeln auf verschiedene transcendente Functionen, welche in der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ enthalten sind.

§. 26.

Als in der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ enthalten, können auch folgende drei Reihen betrachtet werden:

1. $1+\frac{\alpha.y}{\gamma.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots$

2. $1+\frac{y}{\gamma.1}+\frac{y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\dots$

3. $1+\frac{\alpha.\beta}{1}y+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2}y^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3}y^3+\dots$

Von diesen Reihen sind die beiden ersten immer convergent, die dritte aber wird von einem bestimmten Gliede an allemal divergent, und ist nur, wenn dem y sehr kleine Werthe gegeben werden, für eine gewisse Anzahl der ersten Glieder convergent; dieselbe gehört also zu der Classe der semiconvergenten Reihen. Die Reihe (1.) erhält man aus $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, wenn $\beta=m$, $x=\frac{y}{m}$ gesetzt, und m unendlich grofs angenommen wird. Die Reihe (2.) entspringt aus $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, indem $\alpha=m$, $\beta=m'$, $x=\frac{y}{m.m'}$ gesetzt wird, wo m und m' unendlich grofse Quantitäten bezeichnen. Die Reihe (3.) endlich erhält man, indem $\gamma=m$, $x=my$ und $m=\infty$ genommen wird. Einige der gefundenen Umformungen der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ lassen sich nun auch auf diese Reihen anwenden.

Setzt man in Formel (17.) §. 9. $\beta=m$, $x=\frac{y}{m}$, so wird

$$F\left(\alpha,m,\gamma,\frac{y}{m}\right)=\left(1-\frac{y}{m}\right)^{\gamma-\alpha-m}F\left(\gamma-\alpha,\gamma-m,\gamma,\frac{y}{m}\right).$$

Wird nun $m=\infty$ gesetzt, so ist bekanntlich $\left(1-\frac{y}{m}\right)^{-m}=e^y$; also, wenn die Functionen F in Reihen entwickelt werden, hat man

$$4.\quad 1+\frac{\alpha.y}{\gamma.1}+\frac{\alpha(\alpha+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots=$$
$$e^y\left(1-\frac{(\gamma-\alpha)y}{\gamma.1}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)y^2}{\gamma.(\gamma+1)1.2}-\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\alpha+2)y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots\right),$$

eine Formel, durch welche jede Reihe (1.) in eine andere Reihe derselben Art verwandelt werden kann.

Setzt man in Formel (51.) §. 19. $\alpha=m$, $\beta=m-\gamma+1$, $x=\frac{y}{m^2}$, so ist

$$F\left(m,m-\gamma+1,\gamma,\frac{y}{m^2}\right)=\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^{-2m}F\left(m,\gamma-\tfrac{1}{2},2\gamma-1,\frac{\pm4\sqrt{y}}{m\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^2}\right).$$

Wird nun $m=\infty$ gesetzt, so ist $\left(1\pm\frac{\sqrt{y}}{m}\right)^{-2m}=e^{\mp2\sqrt{y}}$, und wenn die Functionen F entwickelt werden,

$$5.\quad 1+\frac{y}{\gamma.1}+\frac{y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\frac{y^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots=$$
$$e^{\pm2\sqrt{y}}\left(1\pm\frac{(\gamma-\frac{1}{2})4\sqrt{y}}{(2\gamma-2)1}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2y}{(2\gamma-1).2\gamma.1.2}\pm\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^3y\sqrt{y}}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)1.2.3}+\ldots\right).$$

Durch diese Formel kann eine jede Reihe (2.) in eine Reihe (1.) verwandelt werden; wenn y negativ wird, so mufs man derselben eine andere Form geben. Man erhält, wenn $y=-z$ gesetzt wird, durch Trennung der realen und der imaginären Theile:

$$6.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}\;\;\frac{z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots=$$
$$\cos(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}-\ldots\right)$$
$$-2\sqrt{z}\sin(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^2z}{2\gamma(2\gamma+1)2.3}+\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})(\gamma+\frac{7}{2})4^2z^2}{2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)(2\gamma+3)2.3.4.5}-\ldots\right)$$

und

$$0=\sin(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1).2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}\ldots\right)$$
$$-2\sqrt{z}\cos(2\sqrt{z})\left(1-\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})4^2z}{2\gamma(2\gamma+1)2.3}+\frac{(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})(\gamma+\frac{7}{2})4^2z^2}{2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)(2\gamma+3)2.3.4.5}\ldots\right),$$

woraus man durch Elimination der zweiten Reihe erhält:

$$7.\quad 1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\frac{z^3}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)1.2.3}+\ldots=$$
$$\frac{1}{\cos(2\sqrt{z})}\left(1-\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})4^2z}{(2\gamma-1)2\gamma.1.2}+\frac{(\gamma-\frac{1}{2})(\gamma+\frac{1}{2})(\gamma+\frac{3}{2})(\gamma+\frac{5}{2})4^4z^2}{(2\gamma-1)2\gamma(2\gamma+1)(2\gamma+2)1.2.3.4}-\ldots\right),$$

Aus dieser Formel (7.) folgt eine höchst merkwürdige Eigenschaft der in Klammern eingeschlossenen Reihe, nämlich dafs sie verschwinden mufs, sobald z einen der Werthe $\frac{\pi^2}{16}$, $\frac{9.\pi^2}{16}$, $\frac{25.\pi^2}{16}$, $\frac{49.\pi^2}{16}$, u. s. w. erhält, und zwar für jeden beliebigen Werth des γ. Wäre dies nicht der Fall, so müfste die stets convergirende Reihe

$$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots$$

für jeden beliebigen Werth des γ unendlich werden, sobald z einen der Werthe $\frac{\pi^2}{16}$, $\frac{9.\pi^2}{16}$, u. s. w. erhält.

Setzt man in Formel (52.) §. 10. $\alpha=m$, $x=\frac{\gamma}{m}$, so ist:

$$F\left(m,\beta,2\beta,\frac{\gamma}{m}\right)=\left(1-\frac{2}{2m}\right)^{-m}F\left(\frac{m}{2},\frac{m+1}{2},\beta+\tfrac{1}{2},\frac{\gamma^2}{(2m-\gamma)^2}\right),$$

und diese Gleichung, für $m=\infty$ entwickelt, giebt:

$$8.\quad 1+\frac{\beta.\gamma}{2\beta.1}+\frac{\beta(\beta+1)\gamma^2}{2\beta(2\beta+1)1.2}+\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\gamma^3}{2\beta(2\beta+1)(2\beta+2)1.2.3}+\dots$$
$$=e^{\frac{\gamma}{2}}\left(1+\frac{\gamma^2}{(\beta+\frac{1}{2})1.2^4}+\frac{\gamma^4}{(\beta+\frac{1}{2})(\beta+\frac{3}{2})1.2.2^8}+\dots\right).$$

Diese Formel, welche eigentlich mit (5.) identisch ist, zeigt, wie diejenige Reihe (1.), in welcher $\gamma=2\beta$ ist, durch eine Reihe (2.) ausgedrückt werden kann.

Die semiconvergente Reihe (3.), kann, wie gezeigt werden soll, durch zwei, immer convergirende Reihen (1.) ausgedrückt werden. Setzt man nämlich in Formel (27.) §. 12. $\gamma=m$, $x=-\frac{m}{y}$, so wird

$$F\left(\alpha,\beta,m,-\frac{m}{y}\right)=$$
$$\frac{m^{-\alpha}\Pi(m-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(m-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}y^{\alpha}F\left(\alpha,\alpha-m+1,\alpha-\beta+1,-\frac{y}{m}\right)$$
$$+\frac{m^{-\beta}\Pi(m-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(m-\beta-1)\Pi(\alpha-1)}y^{\beta}F\left(\beta,\beta-m+1,\beta-\alpha+1,-\frac{y}{m}\right).$$

Für $m=\infty$ ist aber (cfr. Gaufs Abhandlung pag. 27):

$$\frac{m^{-\alpha}\Pi(m-1)}{\Pi(m-\alpha-1)}=1,\quad\text{und daher auch}\quad\frac{m^{-\beta}\Pi(m-1)}{\Pi(m-\beta-1)}=1;$$

wenn also $m=\infty$ gesetzt wird, und die Functionen F entwickelt werden, so erhält man:

$$9.\quad 1-\frac{\alpha.\beta}{1.y}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.y^2}-\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.y^3}+\dots$$
$$=y^{\alpha}\frac{\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}\left(1+\frac{\alpha.y}{(\alpha-\beta+1).1}+\frac{\alpha(\alpha+1)y^2}{(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta+2)1.2}+\dots\right)$$
$$+y^{\beta}\frac{\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\beta-1)}\left(1+\frac{\beta.y}{(\beta-\alpha+1).1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{(\beta-\alpha+1)(\beta-\alpha+2)1.2}+\dots\right).$$

Für den Fall, wo β oder α eine ganze negative Zahl ist, bestehen die in dieser Formel vorkommenden Reihen nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, und es läfst sich dann die Richtigkeit derselben leicht anderweitig beweisen.

§. 27

Die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ läfst sich auf folgende Weise durch bestimmte Integrale ausdrücken:)

$$10.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}.$$

Entwickelt man nämlich den Theil rechts vom Gleichheitszeichen nach Potenzen von x, so erhält man im allgemeinen für den Coefficienten der Potenz x^k:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\int_0^1 u^{\beta+k-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}{1.2\dots\int^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}$$

Es ist aber (man sehe Gaufs Abh. pag. 30)

$$\int^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du=\frac{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}{\Pi(\gamma-1)},$$

also

$$\frac{\int_0^1 u^{\beta+k-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}du}=\frac{\Pi(\beta+k-1)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\gamma+k-1)\Pi(\beta-1)}=\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}.$$

Der Coefficient von x^k ist also

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{1.2\dots k.\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}$$

welches genau der Coefficient von x^k in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ist, so dafs der zweite Theil der Gleichung (10.) nach Potenzen von x entwickelt wirklich $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ giebt, und diese Gleichung deshalb richtig ist. Schreibt man anstatt des unbestimmten Integrales im Nenner seinen Ausdruck durch die Function Π, so ist:

12. $$F(\alpha,\beta,\gamma,x,) = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du.$$

Diese bestimmten Integrale haben aber, wie man sieht, nur dann endliche Werthe, wenn β und $\gamma-\beta$ positiv sind; in jedem anderen Falle werden sie unendlich groſs.

Man kann nun auch die Reihen (1.) und (2.) des vorigen Paragraph's durch bestimmte Integrale ausdrücken. Setzt man nämlich in (11.) $\alpha=m$, $x=\frac{y}{m}$ und $m=\infty$, so erhält man:

13. $$1+\frac{\beta.y}{\gamma.1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\dots = \frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\beta-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}e^{yu}du.$$

Wird nun $\gamma=2\beta$ gesetzt, so ist:

$$1+\frac{\beta y}{2\beta.1}+\frac{\beta(\beta+1)y^2}{2\beta(2\beta+1)1.2}+\dots = \frac{\Pi(2\beta-1)}{(\Pi(\beta-1))^2}\int_0^1(u(1-u))^{\beta-1}e^{yu}du,$$

und, wenn diese Reihe nach der Formel (8.) umgeformt wird:

$$e^{\frac{y}{2}}\left(1+\frac{y^2}{(\beta+\frac{1}{2})1.2^4}+\frac{y^4}{(\beta+\frac{1}{2})(\beta+\frac{3}{2})1.2.2^8}+\dots\right) =$$
$$\frac{\Pi(2\beta-1)}{(\Pi(\beta-1))^2}\int_0^1(u(1-u))^{\beta-1}e^{yu}du,$$

und, wenn $y=4\sqrt{x}$, $\beta=\gamma-\frac{1}{2}$ gesetzt wird:

13. $$1+\frac{x}{\gamma.1}+\frac{x^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}+\dots = \frac{\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(u-u^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}e^{(2u-1)2\sqrt{x}}du.$$

Wenn x negativ $=-z$, so müssen die unmöglichen Exponentialgröſsen in Kreisfunctionen verwandelt werden, woraus hervorgeht:

14. $$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots = \frac{\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(u-u^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos((4u-2)\sqrt{z})du.$$

Dieses Integral besteht, wie man leicht sieht, aus zwei ganz gleichen Theilen, von denen der eine von $u=0$ bis $u=\frac{1}{2}$, der andere von $u=\frac{1}{2}$ bis $u=1$ geht. Es ist daher

$$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z^2}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots = \frac{2\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^{\frac{1}{2}}(u-u^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos((4u-2)\sqrt{z})du,$$

und, wenn $1-2u=v$ gesetzt wird,

15. $$1-\frac{z}{\gamma.1}+\frac{z}{\gamma(\gamma+1)1.2}-\dots = \frac{2^{3-2\gamma}\Pi(2\gamma-2)}{(\Pi(\gamma-\frac{3}{2}))^2}\int_0^1(1-v^2)^{\gamma-\frac{3}{2}}\cos(2v\sqrt{z})dv.$$

Dieses Resultat stimmt vollkommen mit dem überein, welches ich auf eine andere Weise in diesem Journal Bd. 12. pag. 145 hergeleitet habe, um das vollständige Integral der Riccatischen Gleichung durch bestimmte Integrale auszudrücken.

§. 28.

Zwei besonders merkwürdige Fälle der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sind die Fälle $\gamma=\beta+1$ und $\beta=1$. Setzt man in (10.) oder (11.) §. 27. $\gamma=\beta+1$, so erhält man

$$F(\alpha,\beta,\beta+1,x)=\beta\int^1 u^{\beta-1}(1-xu)^{-\alpha}du,$$

und daher, wenn $u=\frac{v}{x}$ gesetzt, und sodann das Zeichen v in x verwandelt wird:

$$16.\quad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)=\beta x^{-\beta}\int_0^x x^{\beta-1}(1-x)^{-\alpha}dx.$$

Formt man diese Reihe F nach Formel (17.) §. 9. um, und setzt alsdann $\beta-\alpha+1$ statt α und $\gamma-1$ statt β, so erhält man

$$17.\quad F(\alpha,1,\gamma,x)=(\gamma-1)x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}\int_0^x x^{\gamma-2}(1-x)^{\alpha-\gamma}dx.$$

Die beiden Reihen $F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$ und $F(\alpha,1,\gamma,x)$ lassen sich also durch unbestimmte Integrale ausdrücken. Durch Reductionsformeln kann man aber aus diesen Reihen die beiden allgemeineren $F(\alpha,\beta,\beta+k,x)$ und $F(\alpha,k,\gamma,x)$ ableiten, in welchen k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so daſs man also eine jede Reihe F, in welcher eines der beiden ersten Elemente eine ganze Zahl ist, oder in welcher das dritte Element von einem der beiden ersten um eine ganze Zahl unterschieden ist, durch unbestimmte Integrale ausdrücken kann. Von der andern Seite kann man nun auch jedes Integral von der Form

$$\int_0^z z^{\lambda-1}(1\pm z^{\mu})^{\nu}dz$$

durch die Function F ausdrücken. Setzt man nämlich in (16.) $x=\pm z^{\mu}$ $\beta=\frac{\lambda}{\mu}$, $\alpha=-\nu$, so wird

$$18.\quad F\left(-\nu,\frac{\lambda}{\mu},\frac{\lambda}{\mu}+1,\pm z^{\mu}\right)=\lambda z^{-\lambda}\int_0^z z^{\lambda-1}(1\mp z^{\mu})^{\nu}dz,$$

und daher

$$19.\quad \int_0^z z^{\lambda-1}(1\mp z^{\mu})^{\nu}dz=\frac{z^{\lambda}}{\lambda}F\left(-\nu,\frac{\lambda}{\mu},\frac{\lambda}{\mu}+1,\pm z^{\mu}\right).$$

Für die Functionen $F(\alpha,1,\gamma,x)$ und $F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$ vereinfachen sich auch die Formeln des §. 11. sehr, indem allemal eine der darin vorkommenden drei Functionen F sich algebraisch ausdrücken läſst.

In (21.) §. 11. gesetzt $\beta=1$, giebt:

$$20.\quad F(\alpha,1,\gamma,x)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}+\frac{\gamma-1}{\gamma-\alpha-1}F(\alpha,1,\alpha-\gamma+2,1-x).$$

In (22.) §. 11. gesetzt $\gamma=\beta+1$, giebt

$$21.\qquad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$$
$$=\frac{\Pi(\beta)\Pi(-\alpha)}{\Pi(\beta-\alpha)}x \;+\; \frac{-\beta}{\alpha-1}(1-x)^{1-\alpha}F(\beta-\alpha+1,1,2-\alpha,1-x).$$

In (24.) §. 11 gesetzt $\gamma=\beta+1$. giebt

$$22.\qquad F(\alpha,\beta,\beta+1,x)$$
$$=\frac{\Pi(\beta)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}(-x)^{-\beta}+\frac{\beta(1-x)^{-\alpha}}{\beta-\alpha}F\left(\alpha,1,\alpha-\beta+1,\frac{1}{1-x}\right).$$

In (25.) §. 11. gesetzt $\beta=1$. giebt:

$$23.\qquad F(\alpha,1,\gamma,x)$$
$$=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(-\alpha)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)}(-x)^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-1}+\frac{\gamma-1}{(\alpha-1)(1-x)}F\left(\gamma-\alpha,1,2-\alpha,\frac{1}{1-x}\right).$$

Diese Gleichungen können mit Hülfe der beiden Formeln (17.) und (18.) des §. 9. auf verschiedene Weise umgeformt werden. Man kann auch statt der Functionen F ihre Ausdrücke durch bestimmte Integrale nehmen, und hat dadurch die Grundgleichungen für die Transcendenten, welche in der Form $\int_0^\kappa z^{\lambda-1}(1\pm z^\mu)^\nu dz$ enthalten sind.

§. 29.

Setzt man in der Formel (11.) §. 27., in welcher die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt ist, $\alpha=\frac{1}{2}$. $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man daraus:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{-\frac{1}{2}}du,$$

und wenn $u=\sin\varphi^2$ genommen wird:

$$F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}.$$

Dieses Integral ist aber das ganze elliptische Integral der ersten Gattung, welches nach Legendre durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}=F^1(c)$$

bezeichnet wird. Man hat daher:

$$24.\qquad \frac{2}{\pi}F^1(c)=F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2).$$

Setzt man ferner in Formel (11.) §. 27. $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man

$$F(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{\frac{1}{2}}du.$$

und wenn $u = \sin\varphi^2$ genommen wird.

$$F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, c^2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi.$$

Dies ist das ganze elliptische Integral der zweiten Gattung, nach **Legendre** bezeichnet durch

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi = \mathrm{E}^1(c).$$

Man hat daher:

$$25.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{E}^1(c) = F(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, c^2).$$

Die ganzen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung (und folglich auch die der dritten Gattung) lassen sich also durch die Reihe F ausdrücken. Aus den beiden Formeln (24.) und (25.) können nun durch Verwandlung der Reihen $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, c^2)$ und $F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, c^2)$ eine große Anzahl anderer hergeleitet werden, von welchen wir einige der merkwürdigsten hier zusammenstellen wollen, wobei, wie es bei **Legendre** gebräuchlich ist, $b^2 = 1 - c^2$ gesetzt werden mag:

$$26.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = \frac{1}{\sqrt{(1+c^2)}}F\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, 1, \frac{4c^2}{(1+c^2)^2}\right),$$

$$27.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, 1, 4b^2c^2),$$

$$28.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = (1-2c^2)F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, 4b^2c^2),$$

$$29.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = \frac{1}{b+c}F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, \frac{8bc^3}{(b+c)^4}\right),$$

$$30.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}}F\left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, 1, \frac{c^4}{(2-c^2)^2}\right),$$

$$31.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = \frac{1}{\sqrt{(1+c^2)}}F\left(\tfrac{1}{8}, \tfrac{3}{8}, 1, \frac{16c^2b^4}{(1+c^2)^4}\right),$$

$$32.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\Pi(-\frac{1}{4}))^2}F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, (1-2c^2)^2)$$
$$-\frac{2\sqrt{\pi}(1-2c^2)}{(\Pi(-\frac{3}{4}))^2}F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, (1-2c^2)^2),$$

$$33.\quad \frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{(\Pi(-\frac{1}{4}))^2}F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, (1-2c^2)^2)$$
$$+\frac{2\sqrt{\pi}(1-2c^2)}{(\Pi(-\frac{3}{4}))^2}F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{3}{2}, (1-2c^2)^2).$$

Die Gleichung (26.) ist durch Verwandlung der Reihe $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, c^2)$ abgeleitet aus (50.) §. 19.; die drei folgenden, (27.), (28.) und (29.), welche

nur in den Grenzen $c^2=0$ bis $c^2=\frac{1}{2}$ gelten, sind abgeleitet aus (57.) und (63.) des §. 19. und (34.) §. 21.; eben so (30.) aus (52.) §. 19.; die Gleichung (31.), welche nur von $c=0$ bis $c=\sqrt{2}-1$ gültig ist, aus (25.) §. 21. Endlich die beiden Gleichungen (32.) und (33) sind aus Formel (72.) §. 20. abgeleitet und stimmen vollkommen mit denen überein, welche Jacobi, *Fundamenta nova etc.* pag. 67 und 68, aufgestellt hat.

Als einige von den mannigfaltigen Ausdrücken der Function $E^1(c)$, welche aus Gleichung (25.) durch Verwandlung der Reihe $F(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)$ gefunden werden, wollen wir folgende aufstellen:

$$34.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=b^2F(\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2},1,c^2),$$

$$35.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=bF\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{-c^2}{b}\right),$$

$$36.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{\left(1-\frac{c^2}{2}\right)}F\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},1,\frac{c^4}{(2-c^2)^2}\right),$$

$$37.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{b}\,F\left(-\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,-\frac{c^4}{4b^2}\right),$$

$$38.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\frac{1+b}{2}F\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\right),$$

$$39.\quad \frac{2}{\pi}E^1(c)=\sqrt{b}\,F\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1,\frac{-(1-b)^2}{4b}\right).$$

Diese sind der Reihe nach aus (17.) und (18.) §. 9. und (52.), (54.), (43.) und (48.) des §. 19. abgeleitet.

Umgekehrt kann man nun auch diese hier vorkommenden Reihen F durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken, welches häufiger in Anwendung kommen wird, da die elliptischen Integrale, für welche überdies vollständige Tafeln berechnet sind, als bekanntere Functionen gelten müssen, als die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$. Wenn man alle möglichen durch die Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes zu bewirkenden Umformungen der Reihe $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,x)$ berücksichtigt, so wird man folgende hypergeometrische Reihen F durch ganze elliptische Integrale ausdrücken können:

$$40.\quad\begin{cases}
F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,x), & F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},1,x), & F(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,x), & F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},1,x), & F(\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8},1,x),\\
F(\tfrac{7}{8},\tfrac{5}{8},1,x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{9}{8},1,x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{7}{8},1,x), & F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},1,x), & F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},1,x),\\
F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},x), & F(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{2},x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8},\tfrac{1}{2},x), & F(\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{8},\tfrac{1}{2},x), & F(\tfrac{7}{8},\tfrac{7}{8},\tfrac{3}{2},x),\\
F(\tfrac{5}{8},\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{2},x), & F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{2},x), & F(\tfrac{5}{8},\tfrac{5}{8},\tfrac{3}{2},x), & F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},x),\\
F(\tfrac{1}{8},\tfrac{5}{8},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{8},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{4},\tfrac{5}{4},x),\\
F(\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{7}{8},\tfrac{3}{4},x), & F(\tfrac{3}{8},\tfrac{3}{8},\tfrac{5}{4},x), & F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{4},x), & F(\tfrac{7}{8},\tfrac{7}{8},\tfrac{3}{4},x),
\end{cases}$$

Es soll nun überdies gezeigt werden, dafs wenn in diesen Reihen die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, auch die so entstandenen Reihen sich durch die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung ausdrücken lassen; oder im allgemeinen, wenn $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ sich durch ganze elliptische Integrale ausdrücken läfst, dafs dasselbe auch von $F(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu,x)$ gilt, wo λ, μ, ν beliebige ganze positive oder negative Zahlen bedeuten. Um dies zu zeigen setze ich

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=P,$$

wo P ein Ausdruck ist, der die elliptischen Integrale F^1 und E^1 enthält. Durch Differentiation folgt hieraus

$$\frac{\alpha.\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)=\frac{dP}{dx}.$$

Da nun die Differenzialquotienten der ganzen elliptischen Integrale wieder auf dieselben Functionen F^1 und E^1 zurückführen, so folgt, dafs $\frac{dP}{dx}$ und daher auch $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$ durch diese elliptischen Integrale sich ausdrücken lassen müssen. Aus $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ und $F(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,x)$ kann man aber $F(\alpha+\lambda,\beta+\mu,\gamma+\nu,x)$ durch Reductionsformeln herleiten, so dafs auch diese allgemeinere Reihe sich durch elliptische Integrale ausdrücken lassen mufs. Jede einzelne der bei (40.) angegebenen Reihen, welche sich durch die elliptischen Integrale ausdrücken lassen, wird daher eine unendliche Anzahl anderer nach sich ziehen, welche dieselbe Eigenschaft haben.

Die bei (40.) zusammengestellten Reihen, nebst denen, welche sich auf die so eben angegebene Weise aus denselben ableiten lassen, erschöpfen aber noch nicht alle Fälle, in welchen die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch ganze elliptische Integrale ausgedrückt werden kann. Man nehme z. B. das Integral

$$41.\quad y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt[4]{(1-c^2\sin\varphi^2)}},$$

welches Legendre (*Traité des fonctions elliptiques, Tom. I. page* 180 *et* 181) durch ein ganzes elliptisches Integral der ersten Gattung ausgedrückt hat. Dasselbe verwandelt sich, wenn $u=\sin\varphi^2$ gesetzt wird, in

$$y=\tfrac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}(1-c^2u)^{-\frac{1}{4}}du,$$

und es ist daher, nach Formel (11.) §. 27.,

$$42.\quad y=\frac{\pi}{2}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},1,c^2).$$

Es mufs sich daher auch die Reihe $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, x)$ nebst allen ihren Umformungen durch ganze elliptische Integrale ausdrücken lassen, also:

$$43. \begin{cases} F(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, x), \; F(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, 1, x), \; F(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, x), \; F(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1, x), \; F(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, x), \\ F(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, 1, x), \; F(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, 1, x), \; F(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}, 1, x), \; F(\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, 1, x), \end{cases}$$

und folglich auch alle diejenigen Reihen F, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt, oder vermindert werden. Es folgt ferner hieraus, dafs auch die Reihe $F(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, z)$ eine Umformung der Reihe $F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x)$ sein mufs. Diese Umformung aber ist in den Formeln des zweiten, dritten und vierten Abschnittes nicht enthalten, weil wir daselbst nur diejenigen Umformungen gesucht haben, bei welchen wenigstens eine der Quantitäten α, β, γ beliebig bleibt.

§. 30.

Es hat im allgemeinen die Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ welche wir in dieser Abhandlung untersuchen, eine unverkennbare Analogie mit den elliptischen Transcendenten, und viele der gefundenen Formeln für die Reihe F, geben wichtige Resultate für die Theorie der elliptischen Functionen.

Setzt man in Formel (51.) §. 19. $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, $x = c^2$, so ist:

$$F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, c^2) = \frac{1}{1+c} F\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, 1, \frac{4c}{(1+c)^2}\right);$$

daher hat man, wenn diese beiden Reihen durch elliptische Functionen ausgedrückt werden,

$$44. \qquad F^1(c) = \frac{1}{1+c} F^1\left(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right),$$

welches eine bekannte Eigenschaft der ganzen elliptischen Integrale der ersten Gattung ist. Eben so, wenn in Formel (43.) §. 19. gesetzt wird $\alpha = \frac{1}{2}$ $\beta = \frac{1}{2}$, $x = c_1^2$, erhält man:

$$45. \qquad F^1(c) = \frac{2}{1+b} F^1\left(\frac{1-b}{1+b}\right).$$

Setzt man in Formel (13.) §. 21. $\alpha = \frac{1}{4}$ $x = c^2$. so erhält man daraus:

$$46. \qquad F^1(c) = \left(\frac{2}{1+\sqrt{b}}\right)^2 F^1\left(\left(\frac{1-\sqrt{b}}{1+\sqrt{b}}\right)^2\right),$$

welche Gleichung in dieser Form zwar neu erscheint, aber unter der Form

$$\frac{1}{1+c} F\left(\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\right) = \frac{2}{1+b} F\left(\frac{1-b}{1+b}\right),$$

welche man aus (46.) erhält, indem statt c gesetzt wird $\frac{2\sqrt{c}}{1+c}$, sogleich als ein bekanntes Resultut erkannt wird.

Setzt man in der Formel (34.) §. 13. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=1$, $x=c^2$, so erhält man daraus unmittelbar jene merkwürdige Gleichung, welche von **Legendre**, **Abel** und **Jacobi** auf sehr verschiedene Arten hergeleitet und bewiesen worden ist, nämlich:

$$47. \quad F^1(c)E^1(b)+F^1(b)E^1(c)-F^1(b)F^1(c)=\frac{\pi}{2}.$$

Betrachtet man ferner jene Differenzialgleichung der dritten Ordnung (4.) §. 4., welche die Bestimmung des z enthält, damit $wF(\alpha',\beta',\gamma',z)$ und $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ einer und derselben linearen Differenzialgleichung der zweiten Ordnung (1.) §. 4. als particuläre Integrale genügen, und setzt man in derselben $\alpha=\alpha'=\frac{1}{2}$, $\beta=\beta'=\frac{1}{2}$, $\gamma=\gamma'=1$, $x=k^2$, $z=\lambda^2$, so erhält man daraus:

$$48. \quad 2\frac{d^3\lambda}{d\lambda\,dk^2}-3\left(\frac{d^2\lambda}{d\lambda\,dk}\right)^2+\frac{1+2\lambda^2+\lambda^4}{\lambda^2(1-\lambda^2)^2}\cdot\frac{d\lambda}{dk^2}-\frac{1+2k^2+k^4}{k^2(1-k^2)^2}=0.$$

Dies ist die von **Jacobi** (*Fund. nova etc. pag.* 77) gefundene Differenzialgleichung, welcher alle Modulargleichungen als algebraische particuläre Integrale genügen.

Werden endlich dieselben Werthe der Quantitäten α, β, γ, α', β', γ', x und z in der Gleichung für den Multiplicator (3.) §. 4. substituirt, so erhält man für den Multiplicator der umgeformten elliptischen Integrale:

$$49. \quad w^2=c\frac{\lambda(1-\lambda^2)\,dk}{k(1-k^2)\,d\lambda},$$

welches genau mit dem von **Jacobi** (*Fund. nova etc. pag.* 75.) gefundenen Ausdrucke übereinstimmt.

§. 31.

Es lassen sich auch die unbestimmten elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung für viele bestimmten Werthe des Modulus durch die Reihe F ausdrücken; umgekehrt läfst sich daher auch die Reihe F in vielen Fällen durch bestimmte elliptische Integrale ausdrücken. Dies soll in dem gegenwärtigen Paragraphen gezeigt werden.

Wir wollen zu diesem Zwecke folgendes unbestimmte Integral betrachten:

$$50. \quad z=\int_0 x^{-\frac{3}{4}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}dx,$$

welches zugleich mit x verschwinden soll. Dasselbe läfst sich nach Formel (19.) §. 28. durch die Reihe F wie folgt ausdrücken:

$$z=4x^{\frac{1}{4}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},x).$$

setzt man aber in diesem Integrale $x=\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2$, so erhält man das umgeformte Integral:

$$z=2\sqrt{2}\int_0\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-\frac{1}{2}\sin\varphi^2)}}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi).$$

Werden diese beiden Ausdrücke des z einander gleich gesetzt, und wird für x sein Werth substituirt, so ist:

$$51.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right).$$

Aus dieser Formel können durch Umformung der Reihe F mehrere andern abgeleitet werden. Setzt man z. B. in Formel (45.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{2}$ und $x=\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2$, so geht dieselbe über in:

$$F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right)=\frac{\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\varphi^2)}}{1+\cos\varphi}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},-\left(\mathrm{tang}\,\frac{\varphi}{2}\right)^4\right);$$

dies in (51.) substituirt, giebt:

$$52.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=2\,\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},-(\mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}\varphi)^4).$$

Setzt man ferner in Formel (43.) §. 19. $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{3}{4}$, $x=1-\cos\varphi^4$, so wird

$$F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1-\cos\varphi^4)=\frac{2}{1+\cos\varphi^2}F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\left(\frac{1-\cos\varphi^2}{1+\cos\varphi^2}\right)^2\right),$$

und dies, in (51.) substituirt, giebt:

$$53.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\sqrt{\left(\frac{1-\cos\varphi^4}{2}\right)}F(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},1-\cos\varphi^4).$$

Verwandelt man die in dieser Formel enthaltene Reihe F weiter nach Formel (21.) §. 28., so wird

$$\mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{3}{4})}-\sqrt{2}.\cos\varphi\sqrt{(1-\cos\varphi^4)}\,F_1(\tfrac{3}{4},\tfrac{1}{2},\tfrac{5}{4},\cos\varphi^4),$$

und wenn diese Reihe endlich nach Formel (17.) §. 9. verwandelt wird:

$$54.\qquad \mathrm{F}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}-\sqrt{2}\cos\varphi\,F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{4},\tfrac{5}{4},\cos\varphi^4).$$

Diese Formel giebt, wenn $\varphi=\frac{\pi}{2}$ gesetzt wird,

$$\mathrm{F}^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}})=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}.$$

Auch das elliptische Integral der zweiten Gattung, dessen Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, kann durch die Reihe F ausgedrückt werden. Setzt man nämlich in

$$\mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}},\varphi)=\int_0 d\varphi\sqrt{(1-\tfrac{1}{2}\sin\varphi^2)}$$

$\cos\varphi^4=1-x$, so erhält man

$$\mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{3}{4}}\,dx + \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{4}}\,dx,$$

und wenn diese beiden Integrale durch die Reihe F ausgedrückt werden,

$$55. \qquad \mathrm{E}(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \varphi) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{2}}\left(F(\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x) + F(\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, x)\right),$$

wo $x = 1 - \cos\varphi^4$.

Es soll ferner folgendes Integral betrachtet werden:

$$y = \int_0 x^{-\frac{5}{6}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx,$$

welches, durch die Reihe F ausgedrückt, giebt:

$$y = 6x^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}, x).$$

Um dasselbe durch elliptische Integrale auszudrücken, nehme man

$$x = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sin\frac{1}{2}\varphi^2 + \sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2)^3} \quad \text{oder} \quad 1 + \sqrt{3}\operatorname{cotang}\tfrac{1}{2}\varphi^2 = x^{-\frac{1}{3}},$$

und setze Kürze halber $\frac{2-\sqrt{3}}{4} = c^2$, so findet man das umgeformte Integral

$$y = 3^{\frac{1}{4}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = 3^{\frac{1}{4}}\mathrm{F}(c, \varphi).$$

Dieser Ausdruck des y, mit den anderen verbunden, giebt

$$57. \qquad \mathrm{F}(c, \varphi) = 2.3^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}, x),$$

$$\text{wo} \quad c^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{4} \quad \text{und} \quad x = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sin\frac{1}{2}\varphi^2 + \sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2)^3}.$$

Geht man eben so von dem Integrale

$$y = \int z^{-\frac{5}{6}}(1+z)^{-\frac{1}{2}}\,dz$$

aus, so ist zunächst

$$y = 6z^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}, -z);$$

setzt man aber

$$z = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - \sin\frac{1}{2}\varphi^2)^3} \quad \text{und} \quad b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4},$$

so verwandelt sich dieses Integral in:

$$y = 3^{\frac{1}{4}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-b^2\sin\varphi^2)}} = 3^{\frac{1}{4}}\mathrm{F}(b, \varphi);$$

man hat daher:

$$58. \qquad \mathrm{F}(b, \varphi) = 2.3^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{6}}F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{7}{6}, -z),$$

$$\text{wo} \quad b^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \text{und} \quad z = \frac{\sin\frac{1}{2}\varphi^6}{(\sqrt{3}\cos\frac{1}{2}\varphi^2 - \sin\frac{1}{2}\varphi^2)^3}.$$

Dies sind die einfachsten Ausdrücke der Functionen $\mathrm{F}(c, \varphi)$ und $\mathrm{F}(b, \varphi)$, aus welchen durch Verwandlungen der Reihe F leicht eine grofse Anzahl ähnlicher abgeleitet werden können. Es lassen sich für diese Werthe der

Moduln c und b auch die elliptischen Integrale der zweiten Gattung durch die Reihe F ausdrücken; da jedoch diese Ausdrücke minder einfach sind, so sollen sie hier übergangen werden.

Es sollen nun noch für zwei andere Werthe des Moduls die elliptischen Integrale der ersten Gattung durch die Reihe F ausgedrückt werden. Nimmt man nämlich das Integral:

$$59.\quad u=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^4-8z^2+8)}},$$

und setzt in demselben $z=m.\sin\varphi$, wo $m^2=4-2\sqrt{2}$, und $k=\sqrt{2}-1$, so wird

$$u=\frac{m}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}=\frac{m}{2\sqrt{2}}\mathrm{F}(k,\varphi).$$

Um dasselbe Integral durch die Reihe F auszudrücken, setze man $z=\frac{2x}{1+x^2}$, so wird

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^8)}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x^8)}},$$

und daher nach Formel (19.) §. 28.:

$$u=\frac{x}{\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)-\frac{x^3}{3\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8).$$

Aus den beiden Ausdrücken des u folgt:

$$60.\quad \frac{m}{2}\mathrm{F}(k,\varphi)=xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)-\frac{x^3}{3}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

wo $m.\sin\varphi=\frac{2x}{1+x^2}$, und daher $x^2=\frac{1-\sqrt{(1-m^2\sin\varphi^2)}}{1+\sqrt{(1-m^2\sin\varphi^2)}}$,

$$m^2=4-2\sqrt{2},\qquad k=\sqrt{2}-1.$$

Auf gleiche Weise findet man einen ähnlichen Ausdruck des elliptischen Integrals $\mathrm{F}(\lambda,\varphi)$, dessen Modul $\lambda=\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}$ ist, aus dem Integrale

$$61.\quad v=\int\frac{dz}{\sqrt{(z^4+8z^2+8)}}.$$

Setzt man nämlich $z=m\tang\psi$, wo $m^2=4-2\sqrt{2}$, und $\lambda^2=2\sqrt{2}-2$, so wird

$$v=\frac{m}{2\sqrt{2}}\int\frac{d\psi}{\sqrt{(1-\lambda^2\sin\psi^2)}}=\frac{m}{2\sqrt{2}}\mathrm{F}(\lambda,\psi);$$

setzt man aber $z=\frac{2x}{1-x^2}$, so wird

$$v=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^8)}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1+x^8)}},$$

also

$$v=\frac{x}{\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)+\frac{x^3}{3\sqrt{2}}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

und aus den beiden Ausdrücken des v folgt:

$$62.\quad \frac{m}{2}\mathrm{F}(\lambda,\psi) = xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)+\frac{x^3}{3}F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8),$$

wo $m\,\mathrm{tang}\,\psi=\frac{2x}{1-x^2}$ und daher $x^2=\frac{\sqrt{(1+m^2\,\mathrm{tang}\,\psi^2)}-1}{\sqrt{(1+m^2\,\mathrm{tang}\,\psi^2)}+1}$ und

$$m^2=4-2\sqrt{2},\qquad \lambda^2=2\sqrt{2}-2.$$

Werden die Formeln (60.) und (62.) addirt und subtrahirt, so erhält man umgekehrt für die Ausdrücke der beiden Reihen $F(\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{9}{8},-x^8)$ und $F(\frac{1}{2},\frac{3}{8},\frac{11}{8},-x^8)$ durch elliptische Integrale:

$$63.\quad xF(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{8},\tfrac{9}{8},-x^8)=\frac{m}{4}(\mathrm{F}(\lambda,\psi)+\mathrm{F}(k,\varphi)),$$

$$64.\quad x^3F(\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{8},\tfrac{11}{8},-x^8)=\frac{3m}{4}(\mathrm{F}(\lambda,\psi)-\mathrm{F}(k,\varphi)).$$

Wir haben hier die unbestimmten elliptischen Integrale der ersten Gattung für die Werthe der Moduln $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)}$ und $\sqrt{2}-1$ durch die Reihe F ausgedrückt; hieraus folgt unmittelbar, dafs sich noch eine unendliche Anzahl anderer elliptischer Integrale ebenfalls durch die Reihe F ausdrücken läfst, nämlich alle diejenigen, deren Moduln als umgeformt aus diesen drei Moduln betrachtet werden können, zu welchen unter andern auch die Moduln $\sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)}$ und $\sqrt{(2\sqrt{2}-2)}$ gehören; die obigen drei Moduln aber sind ganz unabhängig von einander, oder können nicht in einander umgeformt werden. Von der andern Seite sind die hier vorkommenden Reihen F durch elliptische unbestimmte Integrale ausgedrückt, woraus folgt, dafs auch alle Umformungen dieser Reihen F sich durch unbestimmte elliptische Integrale ausdrücken lassen. Für andere Werthe des Moduls, welche von den genannten dreien unabhängig sind, ist es mir nicht gelungen, die elliptischen unbestimmten Integrale durch die Reihe F auszudrücken, man müfste denn die beiden äufsersten Werthe des Moduls 0 und 1 nehmen, welche aber nur Kreisbogen und Logarithmen geben. Übrigens sind grade diese drei Moduln in vielen Beziehungen besonders merkwürdig und haben unter andern die Eigenschaft mit einander gemein, dafs sie sich in ihre Complementair-Moduln umformen lassen.

Eine nur einigermafsen vollständige Sammlung solcher Reihen F zu geben, welche sich durch unbestimmte elliptische Integrale summiren lassen, würde zu weitläuftig sein. Man kann in dieser Hinsicht bemerken, dafs nur solche Reihen F diese Eigenschaft haben können, welche sich

überhaupt durch unbestimmte Integrale ausdrücken lassen, und dies ist, wie wir oben §. 28. gesehen haben, bei denjenigen der Fall, in welchen entweder eines der beiden ersten Elemente α oder β eine ganze Zahl ist, oder in welchen das dritte Element γ um eine ganze Zahl gröfser ist, als eines der beiden ersten. Die Integrale, durch welche solche Reihen ausgedrückt werden, sind immer von der Form:

$$\int x^{\lambda-1}(1\pm x^{\mu})^{\nu}\,dx;$$

nachdem man also eine Reihe F, welche man durch elliptische Integrale summiren will, zunächst durch Integrale von dieser Form ausgedrückt hat, mufs man untersuchen, ob diese sich entweder durch die zahlreichen, von Legendre gegebenen Substitutionen, oder durch andere, in elliptische Integrale verwandeln lassen. Endlich kann noch gezeigt werden, dafs, wenn die Reihe $F(a,b,c,x)$ sich durch elliptische unbestimmte Integrale summiren läfst, dasselbe auch bei der Reihe $F(a+\lambda, b+\mu, c+\nu, x)$ der Fall sein wird, wenn λ, μ, ν, beliebige ganze Zahlen bedeuten. Aus $F(a,b,c,x)$ kann man nämlich $F(a+1, b+1, c+1, x)$ durch Differenziation herleiten, und aus diesen beiden Reihen sodann $F(a+\lambda, b+\mu, c+\nu, x)$ durch Reductionsformeln.

§. 32.

Zu den Transcendenten, welche in der allgemeinen Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ enthalten sind, gehören auch die Coefficienten der Entwickelung

65. $(1+a^2-2a\cos\varphi)^{-n} = P_0+2P_1\cos\varphi+2P_2\cos 2\varphi+2P_3\cos 3\varphi+\ldots$

Diese Coefficienten sind schon sehr oft untersucht worden, und Legendre hat denselben die erste Abtheilung seines *Appendice au traité des fonctions elliptiques*, *Tom. II. pag* 531. *etc.* gewidmet. Wir werden hier dieselben Bezeichnungen, welche Legendre gebraucht, beibehalten, und mit Hülfe der für die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ gefundenen Formeln die Theorie dieser Transcendenten zu vervollständigen suchen. Wenn der allgemeine Coefficient der Entwickelung (65.) als Function seines Stellenzeigers λ und des Exponenten n, durch $P(\lambda,n)$ bezeichnet wird, und Kürze halber gesetzt wird:

$$\frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-1)}{1.2\ldots\lambda} = \Lambda,$$

so ist:

66. $$P(\lambda,n) = \Lambda a^{\lambda} F(n+\lambda, n, \lambda+1, a^2).$$

Indem man die Reihe $F(n+\lambda, n, \lambda+1, a^2)$ nach den im zweiten und

dritten Abschnitte gefundenen Formeln verwandelt, findet man alle bis jetzt bekannten merkwürdigen Eigenschaften dieser Coefficienten, eben so, wie die allgemeinen Reductionsformeln der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ alle Reductionsformeln dieser Coefficienten gewähren. Wir wollen uns nicht damit aufhalten, schon bekannte Eigenschaften zu entwickeln, sondern nur einige noch nicht bekannte Resultate aus dem Obigen herleiten. Alle Reihen, durch welche der Coefficient $P(\lambda, n)$ bis jetzt entwickelt worden ist, haben den Mangel, dafs sie, wenn die Quantität a der Einheit sehr nahe kommt, sehr langsam convergiren, und Legndre a. a. O. pag. 570 schlägt deshalb vor, in diesem Falle die Werthe derselben aus den Ausdrücken durch bestimmte Integrale nach der Methode der Quadraturen zu berechnen. Dieser Übelstand kann auf folgende Weise gehoben werden. Setzt man in Formel (23.) §. 11. $\alpha = n+\lambda$, $\beta = n$, $\gamma = \lambda+1$, $x = a^2$; so erhält man:

$$F(n+\lambda, n, \lambda+1, a^2) = \frac{\Pi(\lambda)\Pi(-2n)}{\Pi(\lambda-n)\Pi(-n)}F(n+\lambda, n, 2n, 1-a^2)$$
$$+\frac{\Pi(\lambda)\Pi(2n-2)}{\Pi(n+\lambda-1)\Pi(n-1)}(1-a^2)^{1-2n}F(1-n, 1+\lambda-n, 2-2n, 1-a^2).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Λa^λ, so erhält man:

$$67.\quad P(\lambda, n) = \frac{\Pi(-2n)(-a)^\lambda}{\Pi(-n-\lambda)\Pi(-n+\lambda)}F(n+\lambda, n, 2n, 1-a^2)$$
$$+\frac{\Pi(2n-2)}{\Pi(n-1))^2}a^\lambda(1-a^2)^{1-2n}F(1-n+\lambda\ 1-n, 2-2n, 1-a^2).$$

Dieser Ausdruck des Coefficienten $P(\lambda, n)$ durch zwei Reihen, welche nach Potenzen von $1-a^2$ geordnet sind, ist grade, in dem Falle, wo a der Einheit sehr nahe kommt, zur numerischen Berechnung äufserst vortheilhaft; aber derselbe kann auch noch in einen andern umgeformt werden, dessen Reihen bei weitem rascher convergiren. Setzt man nämlich in Formel (43.) §. 19. $\alpha = n+\lambda$, $\beta = n$, $x = 1-a^2$, so erhält man:

$$F(n+\lambda, n, 2n, \quad a^2) = \left(\frac{1+a}{2}\right)^{-2n-2\lambda}F\left(n+\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}, \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right),$$

und wenn in derselben Formel (43.) gesetzt wird $\alpha = 1-n+\lambda$, $\beta = 1-n$, $x = 1-a^2$:

$$F(1-n+\lambda, 1-n, 2-2n, 1-a^2)$$
$$= \left(\frac{1+a}{2}\right)^{2n-2-}F\left(1-n+\lambda, \lambda+\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}-n, \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2\right);$$

dies in der Formel (67.) substituirt, giebt:

$$68.\quad P(\lambda,n)=\frac{\Pi(-2n)(-\alpha)^\lambda}{\Pi(-n-\lambda)\Pi(-n+\lambda)}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{-2n-2\lambda}F\left(n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},n+\tfrac{1}{2},\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right)$$
$$+\frac{\Pi(2n-2)}{(\Pi(n-1))^2}\alpha^\lambda(1-\alpha^2)^{1-2n}\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^{2n-2-2\lambda}F\left(1-n+\lambda,\lambda+\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}-n,\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2\right).$$

Die beiden Reihen dieser Formel sind aufserordentlich convergent, sobald α nur einigermafsen der Einheit nahe kommt. So z. B. für $\alpha=\frac{9}{10}$ ist $\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^2=\frac{1}{361}$, so dafs die beiden Reihen in diesem Falle nach Potenzen von $\frac{1}{361}$ fortschreiten. Die durch die Function Π ausgedrückten Factoren findet man mit grofser Genauigkeit aus den Tafeln dieser Function, welche Gaufs und Legendre berechnet haben. Für die beiden Fälle: erstens, dafs n eine ganze Zahl ist, und zweitens, dafs n von der Form $k+\frac{1}{2}$ ist (für k eine ganze Zahl), sind die beiden Formeln (67.) und (68.) unbrauchbar, weil sie unendliche Quantitäten einschliefsen; in dem ersten Falle sind jedoch die Coefficienten $P(\lambda,n)$ nur algebraische Functionen, und im zweiten Falle können sie durch elliptische Functionen ausgedrückt werden, wie Legendre a. a. O. gezeigt hat. Es ist ferner leicht zu zeigen, dafs es aufserdem noch zwei Fälle giebt, in welchen diese Coefficienten alle durch die ganzen elliptischen Integrale der ersten und zweiten Gattung können ausgedrückt werden, nämlich: erstens, wenn n von der Form $k\pm\frac{1}{4}$, und zweitens, wenn n von der Form $k\pm\frac{1}{3}$ ist, wo k eine ganze Zahl. Es ist nämlich §. 29. bei (40.) bemerkt worden, dafs unter andern die beiden Reihen $F(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1,x)$ und $F(\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,x)$, und alle andern, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um beliebige ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken lassen; woraus unmittelbar folgt, dafs

$$P(\lambda,k\pm\tfrac{1}{4})=\Lambda.\alpha^\lambda F(\lambda+k\pm\tfrac{1}{4},k\pm\tfrac{1}{4},\lambda+1,\alpha^2)$$

oder jeder Coefficient der Entwickelung (65.) für $n=k\pm\frac{1}{4}$ sich durch die elliptischen Integrale ausdrücken läfst. Ferner ist §. 29. bei (43.) bemerkt worden, dafs unter andern die beiden Reihen $F(\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,x)$ und $F(\frac{2}{3},\frac{2}{3},1,x)$ und alle, welche aus diesen entstehen, indem die drei ersten Elemente um ganze Zahlen vermehrt oder vermindert werden, sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken lassen; woraus eben so folgt, dafs

$$P(\lambda,k\pm\tfrac{1}{3})=\Lambda.\alpha^\lambda F(\lambda+k\pm\tfrac{1}{3},k\pm\tfrac{1}{3},\lambda+1,\alpha^2),$$

oder jeder Coefficient der Entwickelung (65.) für $n=k\pm\frac{1}{3}$ sich durch die ganzen elliptischen Integrale ausdrücken läfst.

Abschnitt VII.

Über die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, in welcher das letzte Element x imaginär ist.

§. 33.

Die Untersuchung der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, welche wir bisher nur für reale Werthe der vier Elemente α, β, γ und x angestellt haben, könnte von einem weit allgemeineren Gesichtspuncte aus geführt werden, wenn man auch imaginäre Werthe dieser vier Elemente zuließe. (Man vergleiche die Abhandlung von **Abel** über die Binomialreihe, welche ein specieller Fall der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ ist, in diesem Journale Bd. 1. pag. 311.) Im allgemeinen aber würde eine Reihe, in welcher α, β, γ und x imaginär sind, nur durch höhere Transcendenten, welche von acht Elementen abhängig sein würden, real oder unter der Form $M+\sqrt{-1}\,N$ ausgedrückt werden können. Wir werden uns daher hier nur darauf beschränken, die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ für imaginäre Werthe des letzten Elementes x zu betrachten.

Nimmt man $x=re^{v\sqrt{-1}}=r(\cos v+\sqrt{-1}\sin v)$, so zerfällt die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ in folgende zwei Reihen:

$$1.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}r\cos v+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}r^2\cos 2v+\dots$$
$$+\sqrt{-1}\left(\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}r\sin v+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}r^2\sin 2v+\dots\right).$$

Diese Reihen können auf eben so viele Arten in andere Reihen von derselben Form verwandelt werden, wie die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ mit realem letzten Elemente; denn jede der im zweiten, dritten und vierten Abschnitte gefundenen Formeln gewährt eine Formel für die Verwandlung dieser nach Potenzen von r und Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens v fortschreitenden Reihen. Da es nur mit geringen Schwierigkeiten verknüpft ist, die oben gefundenen Formeln für den gegenwärtigen Zweck einzurichten, so mag es hinreichen, dies an einigen der Hauptformeln zu zeigen. Damit aber diese Formeln eine einfachere Gestalt gewinnen, wird es nöthig sein, zunächst einige passende Bezeichnungen einzuführen. Die Reihen, welche hier vorkommen, sollen, wie dies häufig geschieht, durch ihre allgemeinen Glieder bezeichnet werden, welchen das Zeichen Σ vorgesetzt wird; der Stellenzeiger des Gliedes soll stets durch k bezeichnet

werden; ferner soll der $k$te Coefficient der Entwickelung von $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ durch $C_k(\alpha,\beta,\gamma)$ bezeichnet werden, so dafs

$$2.\quad C_k(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k-1)}{1\ldots k.\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+k-1)}.$$

Auf diese Weise wird die Gleichung (1.) folgendermafsen dargestellt werden:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv+\sqrt{-1}\,\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv.$$

Es soll nun zunächst die Formel (17.) §. 9. für den gegenwärtigen Zweck eingerichtet werden. Setzt man in derselben $x=re^{v\sqrt{-1}}$, so ist:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=(1-re^{v\sqrt{-1}})^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}}).$$

Setzt man nun ferner $1-re^{v\sqrt{-1}}=\varrho e^{-w\sqrt{-1}}$, oder

$$\varrho=\sqrt{(1-2\cos v.r+r^2)}\quad\text{und}\quad \operatorname{tang}w=\frac{r\sin v}{1-r\cos v},$$

so hat man nach der angenommenen Art der Bezeichnung:

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k e^{kv\sqrt{-1}}=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\,\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.e^{(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w)\sqrt{-1}},$$

und wenn die realen und die imaginären Theile getrennt werden:

$$3.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.\cos(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w),$$

$$4.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k.\sin(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w).$$

Man kann diese beiden Formeln in eine einzige zusammenfassen. Multiplicirt man nämlich die erste mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$, wo θ eine ganz beliebige Quantität ist, und subtrahirt die Producte von einander, so ist:

$$5.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$
$$=\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)r^k\cos(kv-(\gamma-\alpha-\beta)w+\theta).$$

Auf dieselbe Weise kann man die Formel (18.) §. 9. behandeln, welche für $x=re^{v\sqrt{-1}}$ ist:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,re^{v\sqrt{-1}})=(1-re^{v\sqrt{-1}})^{-\alpha}\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{-re^{v\sqrt{-1}}}{1-re^{v\sqrt{-1}}}\right).$$

Setzt man, eben so wie oben, $\varrho=\sqrt{(1-2\cos v.r+r^2)}$ und $\operatorname{tang}w=\frac{r\sin v}{1-r\cos v}$, so wird

$$1-re^{v\sqrt{-1}}=\varrho e^{-w\sqrt{-1}}\quad\text{und}\quad\frac{-re^{v\sqrt{-1}}}{1-re^{v\sqrt{-1}}}=-\frac{r}{\varrho}.e^{(v+w)\sqrt{-1}};$$

daher kann diese Formel jetzt so dargestellt werden:

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k e^{kv\sqrt{-1}}=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma).\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k e^{(k(v+w)+\alpha w)\sqrt{-1}},$$

und nach Trennung der realen und imaginären Theile:

$$6.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos kv=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k\cos(k(v+w)+\alpha w),$$

$$7.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\sin kv=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k\sin(k(v+w)+\alpha w).$$

Multiplicirt man hier wieder die erste Formel mit $\cos\theta$, die zweite mit $\sin\theta$ und subtrahirt, so werden diese beiden in folgende Formel zusammengefafst:

$$8.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$
$$=\varrho^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k\cos(k(v+w)+\alpha w+\theta).$$

Die beiden allgemeinen Formeln (5.) und (8.) gewähren sehr zahlreiche Umformungen bekannter, nach Sinus und Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordneter Reihen, und zwar vorzüglich für den Fall $r=1$, welchen wir daher besonders betrachten wollen. Für $r=1$ wird

$$\varrho=\sqrt{(2-2\cos v)}=2\sin\frac{v}{2},\qquad \operatorname{tang}w=\operatorname{cotang}\frac{v}{2},$$

und daher $w=\frac{2h+1}{2}\pi-\frac{v}{2}$, wo h irgend eine ganze Zahl bedeutet. Diese Werthe, in Formel (5.) substituirt, geben:

$$9.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta)=$$
$$\left(2\sin\frac{v}{2}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\cos\left(kv+(\gamma-\alpha-\beta)\left(\frac{v}{2}-\frac{2h+1}{2}\pi\right)+\theta\right).$$

Es ist nun die ganze Zahl h zu bestimmen, welche in dem zweiten Theile dieser Gleichung vorkommt. Diese Zahl kann in verschiedenen Grenzen des v andere und andere Werthe bekommen; aber sie kann nur dann ihren Werth ändern, wenn dadurch die Continuität der Werthe der Reihe nicht unterbrochen wird; also nur dann, wenn $2\sin\frac{v}{2}=0$ oder $v=0$, $v=2\pi$, $v=4\pi$, $v=6\pi$, u. s. w.: innerhalb jeder der Grenzen des v, von 0 bis 2π, 2π bis 4π, 4π bis 6π, u. s. w. mufs die ganze Zahl h einen und denselben Werth behalten. Damit nun die Formeln etwas einfacher werden, wollen wir dieselben hier und in dem Folgenden stets nur für die ersten Intervallen des Bogens v betrachten, in welchen sie gültig sind, weil dieselben, indem $v-h\pi$ statt v gesetzt wird, leicht für alle übrigen Grenzen des v erweitert werden können. Um nun den Werth der Zahl h in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$ zu bestimmen, werde $v=\pi$ gesetzt; dies giebt

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)(-1)^k\cos\theta=2^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(-1)^k\cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi),$$

welche Gleichung auch so dargestellt werden kann:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)=2^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-1).\frac{\cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi)}{\cos\theta};$$

setzt man aber in Formel (17.) §. 9. $x=-1$, so ist

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-1)=2^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-1).$$

Diese Gleichung, mit der vorhergehenden verglichen, giebt:

$$\cos\theta = \cos(\theta-(\gamma-\alpha-\beta)h\pi);$$

und damit diese Gleichung für jeden beliebigen Werth von α, β und γ Statt habe, mufs $h=0$ sein. Es ist also in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$, in Formel (9.), $h=0$; dieselbe wird daher

$$10. \quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta)$$
$$= \left(2\sin\frac{v}{2}\right)^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\cos\left(kv+(\gamma-\alpha-\beta)\left(\frac{v-\pi}{2}\right)+\theta\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=2\pi$.

Überdies ist wohl zu beachten, dafs in dieser Formel der Werth von $\gamma-\alpha-\beta$ in den Grenzen -1 und $+1$ enthalten sein mufs, damit beide darin vorkommende Reihen convergent seien.

Ganz auf dieselbe Weise, wie aus der Formel (5.) die Formel (10.) abgeleitet worden ist, findet man, indem in Formel (8.) $r=1$ gesetzt wird:

$$11. \quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\cos(kv+\theta)$$
$$= \left(2\sin\frac{v}{2}\right)^{-\alpha}\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)\left(\frac{-1}{2\sin\frac{v}{2}}\right)^k\cos\left(k\frac{v+\pi}{2}-\alpha\frac{v-\pi}{2}+\theta\right)$$

in den Grenzen $v=\frac{\pi}{3}$ bis $v=\frac{5\pi}{3}$.

Die allgemeinen Gleichungen des §. 11., welche unter dreien Functionen F Statt haben, gewähren ebenfalls jede eine Verwandlung der Reihe $\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$, in zwei andere Reihen derselben Gattung. So z. B. wenn man die Formel (23.) §. 11. auf dieselbe Weise behandelt, wie es mit den beiden Formeln (17.) und (18.) geschehen ist, findet man:

$$12. \quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta) = A_2\Sigma C_k(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1)\varrho^k\cos(kw-\theta)$$
$$+B_2\varrho^{\gamma-\alpha-\beta}\Sigma C_k(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma-\alpha-\beta+1)\varrho^k\cos((k-\alpha-\beta+\gamma)w-\theta),$$

wo ϱ und w dieselben Bedeutungen haben, wie in den übrigen Formeln dieses Abschnittes, und A_2 und B_2 dieselben Constanten sind, wie in der Gleichung (23.) §. 11.

§. 34.

Auf dieselbe Weise können auch alle Formeln des dritten und vierten Abschnittes so verwandelt werden, dafs sie entsprechende Umformungen der nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens und nach Potenzen zugleich geordneten Reihe

$$\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$$

gewähren. Unter diesen sind aber einige besonders merkwürdig, durch

welche eine Reihe dieser Art in eine andere nur nach Potenzen geordnete, oder in eine Reihe F mit realem letzten Elemente verwandelt wird. Diese wollen wir daher jetzt besonders betrachten.

Zwei sehr einfache Formeln dieser Art können aus den Gleichungen (75.) und (76.) §. 20. hergeleitet werden. Setzt man nämlich $x = -\operatorname{tang} v^2$, so erhält man unmittelbar:

$$13.\quad \Sigma C_k\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos kv = c\,F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},-\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$14.\quad \Sigma C_k\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \sin kv = d.\operatorname{tang} v\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},-\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$\text{wo}\quad c = \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}\quad\text{und}\quad d = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Wir wollen auf die beiden Reihen links vom Gleichheitszeichen eine in Formel (8.) des vorigen Paragraphs enthaltene Umformung anwenden. Setzt man nämlich in dieser Formel $r=\frac{1}{2\cos v}$, wodurch $\varrho=\frac{1}{2\cos v}$, $\operatorname{tang} w = \operatorname{tang} v$ wird, so erhält man

$$15.\quad \Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos(kv+\theta)$$
$$=(2\cos v)^\alpha\,\Sigma C_k(\alpha,\gamma-\beta,\gamma)(-1)^k\cos((\alpha+2k)v+\theta)$$
$$\text{in den Grenzen } v=-\frac{\pi}{3} \text{ bis } v=+\frac{\pi}{3},$$

und wenn $\theta=0$, $\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird:

$$16.\quad \Sigma C_k\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \cos kv$$
$$=(2\cos v)^\alpha\,\Sigma C_k\left(\alpha,\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k\cos(\alpha+2k)v;$$

wenn aber $\theta=\frac{\pi}{2}$ und $\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$ gesetzt wird:

$$17.\quad \Sigma C_k\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\cos v}\right)^k \sin kv$$
$$=(2\cos v)^\alpha\,\Sigma C_k\left(\alpha,\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k\sin(\alpha+2k)v.$$

Diese Werthe, in (13.) und (14.) substituirt, geben:

$$18.\quad \Sigma C_k\left(\alpha,\frac{\alpha-\beta+1}{2},\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k\cos(\alpha+2k)v$$
$$=c(2\cos v)^{-\alpha}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},-\operatorname{tang} v^2\right),$$

$$19.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha-\beta+1}{2}, \frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)(-1)^k \sin(\alpha+2k)v$$
$$= d.\operatorname{tang} v(2\cos v)^{-\alpha} F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang} v^2\right).$$

Diese beiden Formeln erhalten eine noch einfachere Gestalt, wenn die beiden Reihen F nach Formel (18.) §. 9. umgeformt werden, und β in $1-\beta$ verwandelt wird. Alsdann hat man

$$20.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k \cos(\alpha+2k)v$$
$$= f.F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right),$$
$$21.\quad \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k \sin(\alpha+2k)v$$
$$= g.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right)$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$.

$$\text{wo}\quad f = \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2^\alpha \Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)} \quad\text{und}\quad g = \frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{2^\alpha \Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(-\frac{1}{2}-\frac{\beta}{2}\right)}.$$

Sowie in diesen Formeln die beiden Reihen $F\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)$ und $F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right)$, welche nach Potenzen von $\sin v^2$ geordnet sind, in andere nach Cosinus und Sinus der Vielfachen von v geordnete Reihen verwandelt sind: so läfst sich auch die Reihe $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$ verwandeln, und zwar auf folgende Weise. Man setze, Kürze halber,

$$22.\quad m = \frac{2^{\beta+\alpha}\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi(-\beta)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

und multiplicire die Formel (20.) mit $m.\cos\frac{\beta\pi}{2}$ und (21.) mit $m.\sin\frac{\beta\pi}{2}$, so findet man zunächst, nach einigen leichten Umformungen der Function Π,

$$m.\cos\frac{\beta\pi}{2}.f = c \quad\text{und}\quad m.\sin\frac{\beta\pi}{2}.g = d,$$

wo c und d dieselben constanten Factoren bezeichnen, wie in (13.) und (14.). Durch Addition und Substraction der mit den angegebenen Quantitäten multiplicirten Gleichungen (20.) und (21.) erhält man daher

$$23.\quad m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k\cos\left((\alpha+2k)v-\frac{\beta\pi}{2}\right)$$
$$= cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)+d.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right),$$
$$24.\quad m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)(-1)^k\cos\left((\alpha+2k)v+\frac{\beta\pi}{2}\right)$$
$$= cF\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{1}{2}, \sin v^2\right)-d.\sin v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \frac{3}{2}, \sin v^2\right).$$

Aus Formel (74.) §. 20. ersieht man aber, indem daselbst $\sqrt{x}=\sin v$ gesetzt wird, dafs der zweite Theil der Gleichung (23.) gleich $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1+\sin v}{2}\right)$ ist, und eben so aus Formel (73.) §. 20., dafs der zweite Theil der Gleichung (24.) gleich $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \frac{1-\sin v}{2}\right)$ ist; substituirt man daher diese Werthe, und verwandelt überdiefs v in $\frac{\pi}{2}-2v$, so erhält man

$$25.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \cos v^2\right)$$
$$= m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)\cos\left((2\alpha+4k)v-(\alpha-\beta)\frac{\pi}{2}\right),$$
$$26.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= m.\Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha-\beta+2}{2}\right)\cos\left((2\alpha+4k)v-(\alpha+\beta)\frac{\pi}{2}\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Noch andere Verwandlungen der Reihe $F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$ erhält man aus der Gleichung (56.) §. 19. Dieselbe geht nämlich, wenn $x=\sin v^2$ gesetzt wird, über in:

$$F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right) = e^{-2\alpha v\sqrt{-1}}F\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta, 2\sin 2v.e^{(\frac{\pi}{2}-2v)\sqrt{-1}}\right);$$

wenn daher die realen und imaginären Theile getrennt werden, erhält man, nach der in diesem Abschnitte eingeführten Bezeichnung:

$$27.\quad F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k\cos\left((2\alpha+2k)v-\frac{k\pi}{2}\right),$$
$$28.\quad 0 = \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k\sin\left((2\alpha+2k)v-\frac{k\pi}{2}\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{12}$.

Dafs die Reihe (28.), welche aufser v noch zwei ganz beliebige Elemente α und β enthält, in den angegebenen Grenzen allemal $=0$ wird, ist eine merkwürdige Erscheinung; es giebt jedoch viele nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordnete Reihen, welche dieselbe Eigenschaft haben. Man kann den Gleichungen (27.) und (28.) auch eine andere Form geben, indem man nämlich erstere mit $\cos 2\alpha v$ letztere mit $\sin 2\alpha v$ multiplicirt und dieselben sodann addirt. Alsdann ist:

$$29.\qquad \cos 2\alpha v\, F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k \cos k\left(2v-\frac{\pi}{2}\right).$$

Wenn man aber (27.) mit $\sin 2\alpha v$ und (28.) mit $\cos 2\alpha v$ multiplicirt, und diese Gleichungen sodann subtrahirt, so ist:

$$30.\qquad \sin 2\alpha v\, F\left(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta+1}{2}, \sin v^2\right)$$
$$= \Sigma C_k\left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta\right)(2\sin 2v)^k \sin k\left(\frac{\pi}{2}-2v\right).$$

§. 35.

Die allgemeine Reihe, deren Umformungen wir in diesem Abschnitte gezeigt haben, nämlich

$$\Sigma C_k(\alpha, \beta, \gamma) r^k \cos(kv+\theta),$$

enthält den gröfsten Theil aller nach Sinus oder Cosinus der Vielfachen eines Bogens geordneter Reihen, welche man als Reihen-Entwickelungen bekannter Functionen aufzustellen pflegt. Diese Reihen-Entwickelungen, und zahlreiche Umformungen derselben, sind in den Formeln dieses Abschnittes enthalten, wie wir es jetzt an einigen Beispielen zeigen wollen.

Setzt man in (8.) §. 33. $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=2$, $\theta=v$, so wird:

$$\Sigma C_k(1,1,2) r^k \cos(k+1)v = \frac{1}{\varrho}\Sigma C_k(1,1,2)\left(\frac{-r}{\varrho}\right)^k \cos(k+1)(v+w),$$

oder, wenn die Reihen entwickelt werden:

$$31.\qquad \frac{\cos v}{1}+\frac{r\cos 2v}{2}+\frac{r^2\cos 3v}{3}+\dots$$
$$= \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\cos(v+w)}{1}-\frac{r\cos 2(v+w)}{\varrho.2}+\frac{r^2\cos 3(v+w)}{\varrho^2.3}-\dots\right),$$

wo $\varrho=\sqrt{(1-2\cos vr+r^2)}$ und $\operatorname{tang} w = \frac{r\sin v}{1-r\cos v}$.

Die Summe der ersten Reihe ist bekanntlich $-\frac{1}{2r}l(1-2\cos vr+r^2) = -\frac{1}{r}l\varrho$; also ist

$$32.\quad -l\varrho = \frac{r\cos(v+w)}{\varrho.1} - \frac{r^2\cos 2(v+w)}{\varrho^2.2} + \frac{r^3\cos 3(v+w)}{\varrho^3.3} - ,\dots$$

Für den speciellen Fall $v=\frac{\pi}{2}$, wodurch $r=\operatorname{tang} w$, $\varrho=\frac{1}{\cos w}$, hat man:

$$33.\quad l\cos w = -\frac{\sin w\sin w}{1} + \frac{(\sin w)^2\cos 2w}{2} + \frac{(\sin w)^3\sin 3w}{3} \dots\dots$$

Setzt man ferner in (32.) $r=2\cos v$, wodurch $\varrho=1$, $w=-2v$, so wird:

$$34.\quad 0 = \frac{2\cos v\cos v}{1} - \frac{(2\cos v)^2\cos 2v}{2} + \frac{(2\cos v)^3\cos 3v}{3} - \dots$$

Wird in der Formel (10.) §. 33. $\gamma=\alpha$, $\beta=-n$, $v=\pi-2x$ und $\theta=nx$ gesetzt, so giebt dieselbe:

$$\Sigma C_k(\alpha,-n,\alpha)(-1)^k\cos(n-2k)x = (2\cos x)^n,$$

oder, entwickelt,

$$35.\quad \cos nx+\frac{n}{2}\cos(n-2)x+\frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x+\dots = (2\cos x)^n$$

in den Grenzen $x=-\frac{\pi}{2}$ bis $x=+\frac{\pi}{2}$;

welches die bekannte, zuerst von **Euler** gefundene Entwickelung der Potenz des Cosinus ist.

Setzt man ferner in Formel (11.) §. 33. $\beta=0$, $\alpha=n$, $v=\pi-2x$ und $\theta=0$, so erhält man:

$$1 = (2\cos x)^{-n}\,\Sigma C_k(n,\gamma,\gamma)\left(\frac{1}{2\cos x}\right)^k\cos(n-k)x,$$

und, wenn mit $(2\cos x)^n$ multiplicirt und die Reihe entwickelt wird,

$$36.\quad (2\cos x)^n = \cos nx+\frac{n}{1}.\frac{\cos(n-1)x}{2\cos x}+\frac{n(n+1)}{1.2}.\frac{\cos(n-2)x}{(2\cos x)^2}+\dots$$

in den Grenzen $x=-\frac{\pi}{3}$ bis $x=+\frac{\pi}{3}$.

Eine Entwickelung der Potenz des Cosinus in eine Reihe von dieser Form ist, wie ich glaube, noch nicht versucht worden. Obgleich dieselbe nur in den angegebenen Grenzen gültig ist, so hat sie doch den Vortheil, dafs sie für alle negativen und positiven Werthe des Exponenten n anwendbar ist, während von den bekannten Entwickelungen keine in den Grenzen $n=-1$ bis $n=-\infty$ convergent ist.

Eine andere Entwickelung der Potenz des Cosinus geht aus Formel (20.) hervor, wenn $\alpha=1$, $\beta=-n$, $v=x$ gesetzt wird, nämlich:

$$37.\quad (\cos x)^n = \frac{2\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\cos x+\frac{n-1}{n+3}\cos 3x+\frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\cos 5x+\dots\right),$$

auf welche zuerst **Poisson** aufmerksam gemacht hat. (Man sehe meine *Dissertatio de sinuum et cosinuum potestatibus etc. Halae* 1832, *pag.* 6 und 13.)

Wird in (20.) gesetzt $\beta=0$, $\alpha=-n$, so erhält man die Entwickelung einer constanten Quantität nach Cosinussen der Vielfachen eines in den angegebenen Grenzen ganz beliebigen Bogens, nämlich

$$38.\quad \frac{2^n\sqrt{\pi}\,\Pi\left(-\frac{n}{2}\right)}{n\,\Pi\left(\frac{-n-1}{2}\right)}=\frac{\cos nv}{n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{\cos(n-2)v}{n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\cos(n-4)v}{n-4}+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$,

wovon folgende bekannte Entwickelung ein specieller Fall ist:

$$\frac{\pi}{4}=\frac{\cos v}{1}-\frac{\cos 3v}{3}+\frac{\cos 5v}{5}-\dots$$

Setzt man in (21.) $\beta=-1$, $\alpha=-n$, so erhält man

$$39.\quad \frac{2^n\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{-n-1}{2}\right)}{(n+1)\,\Pi\left(-\frac{n}{2}-1\right)}\sin v$$

$$=\frac{\sin nv}{(n+1)(n-1)}+\frac{n}{1}\cdot\frac{\sin(n-2)v}{(n-1)(n-3)}+\frac{n(n-1)}{1.2}\cdot\frac{\sin(n-4)v}{(n-3)(n-5)}+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$.

Wird die Gleichung (38.) nach v differenziirt, so erhält man daraus

$$40.\quad 0=\sin nv+\frac{n}{1}\sin(n-2)v+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)v+\dots$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$,

und diese Reihe ist, wie die neueren Untersuchungen über die Entwickelung der Potenzen des Cosinus und Sinus streng bewiesen haben, wirklich in den angegebenen Grenzen gleich Null.

Wird in (39.), nachdem durch n dividirt worden ist, $n=0$ gesetzt, so erhält man

$$41.\quad \frac{\pi}{4}\sin v=\frac{v}{2}+\frac{\sin 2v}{1.2.3}-\frac{\sin 4v}{3.4.5}+\frac{\sin 6v}{5.6.7}-\dots,$$

und hieraus durch Differenziation:

$$42.\quad \frac{\pi}{4}\cos v=\tfrac{1}{2}+\frac{\cos 2v}{1.3}-\frac{\cos 4v}{3.5}+\frac{\cos 6v}{5.7}-\dots$$

Diese einfache Reihe hat zuerst **Fourier** gefunden (*Théorie de la chaleur*

pag. 242). Eine unendliche Anzahl ähnlicher Reihen-Entwickelungen habe ich in meiner erwähnten Dissertation hergeleitet (pag. 25 und 30).

Die Formeln dieses Abschnittes enthalten auch einige merkwürdige neue Reihen-Entwickelungen der elliptischen Integrale. Setzt man in den Formeln (25.) und (26.) $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{2}$, so erhält man daraus, weil $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,c^2)=\frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)$:

$$43.\quad \mathrm{F}^1(\cos v)=\pi\left(\cos v+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cos 5v+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\cos 9v+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\cos 13v+\dots\right),$$

$$44.\quad \mathrm{F}^1(\sin v)=\pi\left(\sin v+\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin 5v+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\sin 9v+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\sin 13v+\dots\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Diese ihrer Form wegen nicht uninteressanten Entwickelungen lassen sich auch aus der Theorie der elliptischen Functionen selbst herleiten; wobei es nur darauf ankommt die Richtigkeit folgender Gleichung zu beweisen:

$$45.\quad \sqrt{c}\,\mathrm{F}^1(c)+\frac{1}{\sqrt{c}}\mathrm{F}^1\left(\frac{1}{c}\right)=\mathrm{F}^2\left(\frac{1+c}{\sqrt{c}}\right).$$

Wird in der §. 29. gefundenen Formel (26.)

$$\frac{2}{\pi}\mathrm{F}^1(c)=\frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}}F\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\frac{4c^2}{(1+c^2)^2}\right)$$

$c=\operatorname{tang}\frac{v}{2}$ gesetzt, so erhält man daraus

$$46.\quad \mathrm{F}^1\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{v}{2}F(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4},1,\sin v^2).$$

Setzt man daher in Formel (26.) $\alpha=\frac{1}{4}$ und $\beta=\frac{3}{4}$, so geht daraus hervor:

$$47.\quad \mathrm{F}^1\left(\operatorname{tang}\frac{v}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(-\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{3}{4})}\cos\frac{v}{2}\left(\sin\frac{v}{2}+\frac{1.1}{3.2}\sin\frac{9v}{2}+\frac{1.5.1.3}{3.7.2.4}\sin\frac{17v}{2}+\dots\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{2}$.

Man kann den Factor dieser Formel auch durch ein elliptisches Integral ausdrücken. Es ist nämlich

$$48.\quad \frac{\sqrt{\pi}\,\Pi(-\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{3}{4})}=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}});$$

daher läſst sich, wenn $2v$ statt v gesetzt wird, diese Formel auch so darstellen:

$$49.\quad \mathrm{F}^1\operatorname{tang}v)=2\sqrt{2}\,\mathrm{F}^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}})\cos v\left(\sin v+\frac{1.1}{3.2}\sin 9v+\frac{1.5.1.3}{3.7.2.4}\sin 17v+\dots\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{4}$.

Setzt man in Formel (26.) $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, so leitet man daraus ganz auf

dieselbe Weise eine ähnliche Entwickelung von $F^1(\tang v)$ ab:

$$50.\quad F^1(\tang v) = \frac{\pi\sqrt{2}}{F^1(\sqrt{\frac{1}{2}})}\cos v\left(\sin 3v + \frac{3.1}{5.2}\sin 11v + \frac{3.7.1.3}{5.9.2.4}\sin 19v + \dots\right)$$

in den Grenzen $v=0$ bis $v=\frac{\pi}{4}$.

Noch einige andere Reihen-Entwickelungen der ganzen elliptischen Integrale kann man aus den Formeln (27.), (29.) und (30.) ableiten.

§. 36.

Wir haben in dem Paragraph 34. mehrere Reihen F in andere Reihen verwandelt, welche nach Sinussen und Cosinussen der Vielfachen eines Bogens geordnet sind; eine Umformung dieser Art aber haben wir noch unberücksichtigt gelassen, und zwar deshalb, weil die umgeformte Reihe nicht von der Form $\Sigma C_k(\alpha,\beta,\gamma)r^k\cos(kv+\theta)$ ist. Denkt man sich nämlich in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)$ die Potenzen von $\cos v$ in Cosinus der Vielfachen von v verwandelt, so ist klar, dafs dieselbe in eine Reihe von folgender Form übergehen wird:

$$51.\quad F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2) = A_0 + 2A_1\cos 2v + 2A_2\cos 4v + 2A_3\cos 6v + \dots$$

Die Coefficienten A_0, A_1, A_2, etc. lassen sich nach einer bekannten Methode durch bestimmte Integrale ausdrücken, so dafs im Allgemeinen

$$52.\quad A_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)\cos 2kv\,dv.$$

Es lassen sich ferner diese Coefficienten, welche im Allgemeinen höhere Transcendenten sind als die in der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ enthaltenen, alle auf zwei derselben reduciren. Wendet man nämlich auf die Entwickelung (51.) die Differenzialgleichung

$$53.\quad 0 = 4\alpha\beta\sin 2v.y + 2(2\gamma-\alpha-\beta-1-(\alpha+\beta)\cos 2v)\frac{dy}{dv} - \sin 2v\frac{d^2y}{dv^2}$$

an, welcher $y=F(\alpha,\beta,\gamma,\cos v^2)$ genügt, so findet man, dafs unter je dreien auf einander folgenden Coefficienten dieser Entwickelung folgende Gleichung bestehen mufs:

$$54.\quad (k+\alpha-1)(k+\beta-1)A_{k-1} - 2k(2\gamma-\alpha-\beta-1)A_k - (k-\alpha+1)(k-\beta+1)A_{k+1} = 0.$$

Man sieht schon hieraus, dafs im Allgemeinen die Entwickelung (51.) nicht so einfach sein wird, als die §. 34. gefundenen; denn bei diesen waren die Coefficienten so beschaffen, dafs jeder folgende aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung einiger Factoren gebildet wurde. Es werden jedoch die Coefficienten der Entwickelung (51.) dieselbe Eigenschaft in dem speciellen Falle haben, wo $2\gamma-\alpha-\beta-1=0$ oder

$\gamma=\frac{\alpha+\beta+1}{2}$, in welchem Falle die Gleichung (54.) übergeht in

$$55.\quad (k+\alpha-1)(k+\beta-1)A_{k-1}=(k-\alpha+1)(k-\beta+1)A_{k+1}.$$

Aus dieser Gleichung zieht man

$$A_2=\frac{\alpha.\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}A_0,\qquad A_3=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}A_1,$$
$$A_4=\frac{(\alpha+2)(\beta+2)}{(\alpha-4)(\beta-4)}A_2,\qquad A_5=\frac{(\alpha+3)(\beta+3)}{(\alpha-5)(\beta-5)}A_3,$$
etc. etc.

so dafs die Entwickelung (51.) in folgende übergeht:

$$56.\quad F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\cos v^2\right)$$
$$=A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 4v+\frac{2\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{(\alpha-2)(\alpha-4)(\beta-2)(\beta-4)}\cos 8v+\dots\right)$$
$$+2A_1\left(\cos 2v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 6v+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\beta-3)(\beta-5)}\cos 10v+\dots\right).$$

Auch in dieser Formel lassen sich die constanten Factoren A_0 und A_1, wie gezeigt werden soll, durch die Function Π ausdrücken. Hierzu ist jedoch nöthig, erst noch eine Umformung dieser Formel vorzunehmen. Setzt man in derselben $\frac{\pi}{2}-v$, so erhält man:

$$F(\sin v^2)=A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 4v+\dots\right)$$
$$-2A_1\left(\cos 2v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 6v+\dots\right),$$

wo Kürze halber $F(\sin v^2)$ statt $F\left(\alpha,\beta,\frac{\alpha+\beta+1}{2},\sin v^2\right)$ gesetzt ist. Addirt und subtrahirt man diese Gleichung und die vorige und setzt alsdann $\frac{v}{2}$ statt v, so erhält man:

$$57.\quad \begin{cases} F\left(\cos\frac{v^2}{2}\right)+F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2A_0\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\dots\right),\\ F\left(\cos\frac{v^2}{2}\right)-F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=4A_1\left(\cos v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\dots\right).\end{cases}$$

Setzt man aber in den Formeln (75.) und (76.) §. 20. $x=\cos v^2$, so wird

$$F\left(\cos\frac{v}{2}\right)+F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2c\,F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},\cos v^2\right),$$
$$F\left(\cos\frac{v}{2}\right)-F\left(\sin\frac{v^2}{2}\right)=2d\cos v\,F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},\cos v^2\right),$$

$$\text{wo}\quad c=\frac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}\quad\text{und}\quad d=\frac{2\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)}.$$

Deshalb gehen nun die Formeln (57.) in folgende über:

$$58.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},\cos v^2\right)=\frac{A_0}{c}\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\dots\right),$$

$$59.\quad \cos v\, F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2},\cos v^2\right)=\frac{2A_1}{d}\left(\cos v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\dots\right).$$

Aus diesen ergiebt sich:

$$\frac{A_0}{c}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},\cos v^2\right)dv,$$

$$\frac{A_1}{d}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos v^2 F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{3}{2}\cos v^2\right)dv.$$

Entwickelt man die Functionen F unter den Integrationszeichen, und integrirt die Potenzen des Cosinus in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man

$$\frac{A_0}{c}=1+\frac{\frac{\alpha}{2}.\frac{\beta}{2}.\frac{1}{2}}{1.\frac{1}{2}.1}+\frac{\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)\frac{\beta}{2}\left(\frac{\beta}{2}+1\right).\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.1.2}+\dots,$$

$$\frac{2A_1}{d}=1+\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right).\frac{3}{2}}{1.\frac{3}{2}.2}+\frac{\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)\left(\frac{\beta+1}{2}\right)\left(\frac{\beta+3}{2}\right).\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.2.3}+\dots,$$

und weil in den einzelnen Gliedern dieser Reihen die gleichen Factoren des Zählers und Nenners $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ... sich hinweghoben, so findet man

$$\frac{A_0}{c}=F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},1,1\right)\quad\text{und}\quad\frac{2A_1}{d}=F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2},2,1\right),$$

und folglich durch die Function Π ausgedrückt:

$$60.\quad \frac{A_0}{c}=\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}\quad\text{und}\quad\frac{2A_1}{d}=\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Formeln (58.) und (59.), so hat man

$$61.\quad F\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2},\frac{1}{2},\cos v^2\right)=$$

$$\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}\left(1+\frac{2\alpha\beta}{(\alpha-2)(\beta-2)}\cos 2v+\frac{2\alpha(\alpha+2)\beta(\beta+2)}{(\alpha-2)(\alpha-4)(\beta-2)(\beta-4)}\cos 5v+\dots\right),$$

$$62.\quad \cos v.F\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{\beta+1}{2}.\frac{3}{2},\cos v^2\right)=$$

$$\frac{\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}\left(\cos v+\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha-3)(\beta-3)}\cos 3v+\frac{(\alpha+1)(\alpha+3)(\beta+1)(\beta+3)}{(\alpha-3)(\alpha-5)(\beta-3)(\beta-5)}\cos 5v+\dots\right).$$

Substituirt man in den Gleichungen bei (60.) die Werthe des c und d, so erhält man aus denselben

$$63.\quad \begin{cases} A_0 = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\Pi\left(-\frac{\beta}{2}\right)}, \\ A_1 = \dfrac{\sqrt{\pi}\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{-\alpha-\beta}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}-1\right)\Pi\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Pi\left(\frac{1-\beta}{2}\right)}. \end{cases}$$

Dies sind also die Werthe der constanten Factoren in der Formel (56.).

Es mögen nun auch von den Formeln dieses Paragraphs einige specielle Fälle erwähnt werden. Setzt man in den Formeln (61.) und (62.) $\alpha=n$, $\beta=-n$, $\frac{\pi}{2}-v$ statt v, und bemerkt, dafs

$$F\left(-\frac{n}{2},\frac{n}{2},\frac{1}{2},\sin v^2\right)=\cos nv,$$

$$\sin v\, F\left(\frac{1+n}{2},\frac{1-n}{2},\frac{3}{2},\sin v^2\right)=\frac{\sin nv}{n}$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$ (m. s. Gaufs Abh. pag. 5, XVI. und pag. 6, XX.), so erhält man

$$\cos nv = \frac{2n}{\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{2\cos 2v}{(n-2)(n+2)}+\frac{\sin 4v}{(n-4)(n+4)}-\ldots\right),$$

$$\sin nv = \frac{-4n}{\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\left(\frac{\sin v}{(n-1)(n+1)}-\frac{\sin 3v}{(n-3)(n+3)}+\frac{\sin 5v}{(n-5)(n+5)}-\ldots\right)$$

in den Grenzen $v=-\frac{\pi}{2}$ bis $v=+\frac{\pi}{2}$.

Wird in (56.) $\alpha=\frac{1}{2}$ und $\beta=\frac{1}{2}$ gesetzt, so erhält man eine neue Entwickelung des elliptischen Integrales:

$$66.\quad F^1(\cos v) = \frac{\pi}{2}A_0\left(1+2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cos 4v+2\left(\frac{1.5}{3.7}\right)^2\cos 8v+\ldots\right)$$
$$+\pi A_1\left(\cos 2v+\left(\frac{3}{5}\right)^2\cos 6v+\left(\frac{3.7}{5.9}\right)^2\cos 10v+\ldots\right),$$

in welcher, nach Gleichung (63.),

$$A_0=\frac{\pi}{(\Pi-\frac{1}{4})^4},\qquad A_1=\frac{\pi}{(\Pi-\frac{1}{4})^2(\Pi\frac{1}{4})^2};$$

oder, durch elliptische Integrale ausgedrückt, weil $F^1(\sqrt{\frac{1}{2}})=\frac{\sqrt{(2\pi)}\,\Pi(\frac{1}{4})}{\Pi(-\frac{1}{4})}$:

$$A_0=\frac{4}{\pi^2}(F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2,\qquad A_1=\frac{1}{(F^1(\sqrt{\frac{1}{2}}))^2}.$$

Aus der Entwickelung (66.) erhält man folgende bestimmten Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^1(\cos v).\cos 4kv\,dv \quad = \left(\frac{1.5\dots(4k-3)}{3.7\dots(4k-1)}\right)^2 (F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} F^1(\cos v).\cos(4k+2)v\,dv = \left(\frac{3.7\dots(4k-1)}{5.9\dots(4k+1)}\right)^2 \frac{\pi^2}{4(F^1(\sqrt{\frac{1}{2}}))^2},$$

welche für $k=0$ auch so dargestellt werden können:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-x^2y^2)}} = (F^1(\sqrt{\tfrac{1}{2}}))^2,$$

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(2x^2-1)\,dx\,dy}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-x^2y^2)}} = \frac{\pi^2}{4(F^1(\sqrt{\frac{1}{2}}))^2}.$$

Die Reihen-Entwickelungen, welche in diesem letzten Paragraphen enthalten sind, streifen eigentlich schon in ein fremdes Gebiet hinüber, indem sie nicht mehr der Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$, sondern der allgemeineren hypergeometrischen Reihe

$$1+\frac{\alpha.\beta.\lambda}{1.\beta.\nu}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)\nu(\nu+1)}x^2+\dots,$$

angehören. Obgleich diese Reihe viele Eigenschaften mit der specielleren $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ gemein hat, so fehlt ihr doch gerade diejenige, auf welcher die Formeln des zweiten und dritten Abschnittes beruhen, nämlich, daſs sie sich in andere Reihen derselben Art verwandeln läſst. Nur für den Fall $x=1$ habe ich zahlreiche Verwandlungen dieser Reihe entdecken können, z. B.:

$$1+\frac{\alpha.\beta.\lambda}{1.\gamma.\nu}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)\nu(\nu+1)}+\dots$$

$$= C\left(1+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\lambda}{1.\gamma(\nu+\gamma-\alpha-\beta)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\alpha+1)(\gamma-\beta)(\gamma-\beta+1)\lambda(\lambda+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)(\nu+\gamma-\alpha-\beta)(\nu+\gamma-\alpha-\beta+1)}+\dots\right),$$

$$\text{wo}\quad C=\frac{\Pi(\nu-1)\,\Pi(\nu+\gamma-\lambda-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\nu-\lambda-1)\,\Pi(\nu+\gamma-\alpha-\beta-1)}$$

Auch läſst sich die Summe dieser Reihe für $x=1$ im Allgemeinen nicht durch die Function Π ausdrücken, sondern nur in specielleren Fällen, von welchen einer folgender ist:

$$1+\frac{\alpha.\beta}{\gamma(\alpha+\beta-\gamma+2)}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)(\alpha+\beta-\gamma+2)(\alpha+\beta-\gamma+3)}+\dots$$

$$=\frac{(\alpha+\beta-\gamma+1)(\gamma-1)}{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}\left(\frac{\Pi(\gamma-2)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}-1\right).$$

Übrigens muſs die Methode, welche für die allgemeine Untersuchung dieser Reihe angewendet werden soll, von der in dieser Abhandlung enthaltenen wesentlich verschieden sein, weil die Natur dieser allgemeineren Reihe durch eine lineäre Differenzialgleichung der dritten Orodnung ausgedrückt wird, während die Reihe $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ das Integral einer lineären Differenzialgleichung der zweiten Ordnung ist.

9.

Nachträgliche Entwickelungen zur Theorie der Potenzial-Functionen im Betreff der vermittelnden Function $\mathfrak{L}x$ und $\frac{\mathfrak{L}(xi)}{i} = lx$.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Gudermann*, zu Münster.)

1.

Die durch das Symbol $\mathfrak{L}x$ in des Verfassers Theorie der Potenzial-Functionen bezeichnete vermittelnde Function dient zur Zurückführung der hyperbolischen Functionen auf die cyklischen, wenn dabei die imaginären Formen vermieden werden sollen. Fast noch wichtiger ist der Gebrauch eben dieser vermittelnden Function in Ansehung der elliptischen Functionen, was bei einer späteren Gelegenheit aus einander gesetzt werden wird; daher zieht sie auf's Neue die Aufmerksamkeit auf sich, und es belohnt die Mühe, dieselbe wiederholt in Betracht zu ziehen. Ihrer ursprünglichen Bestimmung gemäfs sollte die Function $\mathfrak{L}x$ nur zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$, wenn durch π die Ludolphische Zahl bezeichnet wird, dienen; aber auch über diese Grenzen hinaus leistet sie, wie spätere Untersuchungen gezeigt haben, wichtige Dienste, und diese Abhandlung bezweckt daher zum Theil die Angabe oder Ermittelung der Werthe von $\mathfrak{L}x$, wenn $x > \frac{\pi}{2}$ genommen wird. Eine besondere Sorgfalt ist bei dieser Ermittelung erforderlich, weil die Anwendung einiger von den früher entwickelten Formeln, welche allerdings zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ ihre volle Gültigkeit haben, zu Irrthümern führt, sobald man diese Grenzen der Anwendung überschreitet.

Nicht minder erheblich ist die Darstellung der Gröfsen $\mathfrak{L}(x \pm y)$ und $l(x \pm y)$ in der Form von Binomen, und auch dieses Problem wird aufgelöst werden.

Gehen wir aus von dem Ausdrucke

$$1. \quad \mathfrak{L}x = \log \sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)} \quad \text{oder} \quad e^{\mathfrak{L}x} = \sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)},$$

oder von den beiden nachstehenden Reihen:

2. $\mathfrak{L}x = \sin x + \frac{1}{3}\sin x^3 + \frac{1}{5}\sin x^5 + \frac{1}{7}\sin x^7 + \frac{1}{9}\sin x^9 + \text{etc.},$

3. $\mathfrak{L}x = 2[\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{7}\sin 7x + \frac{1}{9}\sin 9x - + \text{etc.}],$

und setzen wir

4. $\mathfrak{L}'x = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, also $\mathfrak{L}'(-x) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$,

so verwandeln sich jene Ausdrücke in:

5. $\mathfrak{L}'x = \log\sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)}$, $e^{\mathfrak{L}'x} = \sqrt{\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)}$,

6. $\mathfrak{L}'x = \cos x + \frac{1}{3}\cos x^3 + \frac{1}{5}\cos x^5 + \frac{1}{7}\cos x^7 + \frac{1}{9}\cos x^9 + \text{etc.},$

7. $\mathfrak{L}'x = 2[\cos x + \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x + \frac{1}{7}\cos 7x + \frac{1}{9}\cos 9x + \text{etc.}].$

Setzt man in diesen Formeln $-x$ statt x, so bleiben sie ungeändert, und man könnte also aus allen diesen Formeln schliefsen, dafs

$$\mathfrak{L}'(+x) = \mathfrak{L}'(-x) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

sei; aber dieses Resultat ist dennoch falsch. Nimmt man auf beiden Seiten die hyperbolischen Tangenten, so hat man $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, und da dem Wesen der vermittelnden Function gemäfs $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ und auch $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ ist, so folgt auch noch, dafs $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ sei, was ganz richtig ist. Aber die obige Gleichung ist auch nur in Ansehung der hyperbolischen Tangenten oder cyklischen Sinus richtig; nimmt man nämlich auf beiden Seiten die hyperbolischen Sinus und Cosinus, so erhält man

$$\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

und da diese mit den Gleichungen

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)},$$

welche unrichtig sind, im Wesen übereinstimmen, so erhellet, dafs die Gleichung $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ in Ansehung der Zurückführung der hyperbolischen Sinus und Cosinus auf cyklische Functionen falsch ist, obgleich dieselbe Gleichung bei der Zurückführung der hyperbolischen Tangenten keinen Fehler bemerken liefs.

Zusatz. Die Reihe (3.) kann auf folgende einfache Art gefunden werden. Es ist auch $\mathfrak{L}x = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$ oder $x = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}lx\right)$ oder $e^x = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}lx\right)$, und eben so $e^{-x} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}lx\right)$, also

$$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}lx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^x) \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}lx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^{-x}).$$

Daher erhält man durch Subtraction

$$lx = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^x) - \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^{-x}),$$

eben so

$$i\mathfrak{L}x = \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^{xi}) - \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = e^{-xi}).$$

Die Entwickelung dieser Ausdrücke giebt die Reihen

$$lx = (e^x - e^{-x}) - \tfrac{1}{3}(e^{3x} - e^{-3x}) + \tfrac{1}{5}(e^{5x} - e^{-5x}) \ldots,$$

$$\mathfrak{L}x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{i} - \tfrac{1}{3}\frac{(e^{3xi} - e^{-3xi})}{i} + \tfrac{1}{5}\frac{(e^{5xi} - e^{-5xi})}{i} \ldots,$$

und da überhaupt $e^{nx} - e^{-nx} = 2\,\mathfrak{Sin}\,nx$ und $\frac{e^{nxi} - e^{-nxi}}{i} = 2\sin nx$ ist, so hat man:

$$\tfrac{1}{2}.\,lx = \mathfrak{Sin}\,x - \tfrac{1}{3}\mathfrak{Sin}\,3x + \tfrac{1}{5}\mathfrak{Sin}\,5x - \tfrac{1}{7}\mathfrak{Sin}\,7x + - \text{etc.} \quad \text{und}$$

$$\tfrac{1}{2}.\,\mathfrak{L}x = \sin x - \tfrac{1}{3}\sin 3x + \tfrac{1}{5}\sin 5x - \tfrac{1}{7}\sin 7x + - \text{etc.}$$

2.

Wenn man in dem Ausdrucke $\mathfrak{L}x = \log \sqrt{\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)}$ die Tangenten einführt und beachtet, dafs

$$\sqrt{(1+\sin x)} = \cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}\left(1 + \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right),$$

$$\sqrt{(1-\sin x)} = \cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}\left(1 - \operatorname{tang}\frac{x}{2}\right)$$

ist, so erhält man:

$$8. \qquad \mathfrak{L}x = \log\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{x}{2}} = \log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right).$$

Hiernach ist $\mathfrak{L}'x = \log \operatorname{tang}\frac{1}{2}(\pi - x)$, also

$$\mathfrak{L}'(-x) = \log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi + x) = \log(-1) + \log \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\pi - x)$$

oder

$$\mathfrak{L}'(-x) = \log(-1) + \mathfrak{L}'x, \text{ d. h.}$$

$$9. \qquad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \log(-1) + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Dieser Ausdruck gestattet noch eine kleine Reduction, da $\log(-1) = \pm \pi i$ ist, und man erhält hierdurch

$$10. \qquad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \pm \pi i + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

wenn, wie auch schon früher geschah, nach dem allgemeinen Gebrauche $\sqrt{-1}$ durch i repräsentirt wird. Das so eben gefundene Resultat bewährt sich als richtig bei der Zurückführung aller hyperbolischer Functionen auf die cyklischen; denn da allgemein

$$\mathfrak{Cos}(a \pm (2r+1)\pi i) = -\mathfrak{Cos}\, a,$$
$$\mathfrak{Sin}(a \pm (2r+1)\pi i) = -\mathfrak{Sin}\, a,$$
$$\mathfrak{Tang}(a \pm (2r+1)\pi i) = +\mathfrak{Tang}\, a$$

ist, so erhält man aus der vorigen Gleichung die drei folgenden:

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ oder } \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = -\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)},$$

$$\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ oder } \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

$$\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = +\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \text{ oder } \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = +\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),$$

welche vollkommen richtig sind. Dividirt man die Gleichung (10.) zuerst durch 2, und nimmt man dann auf beiden Seiten die hyperbolischen Tangenten, so hat man, weil $\mathfrak{Tang}\left(a \pm \frac{\pi i}{2}\right) = \mathfrak{Cotang}\, a$ ist, die Gleichung $\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$ und da $\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$, ferner $\mathfrak{Tang}\frac{1}{2}\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ ist, so verwandelt diese sich in die Gleichung $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{1}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$, welche bekanntlich ebenfalls richtig ist. Daher ist die Richtigkeit der Formel (10.) keinem Zweifel mehr unterworfen.

Da $\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \log\frac{1}{0}$ ist, so hat die Function $\mathfrak{L}x$ die merkwürdige Beschaffenheit, dafs sie bei ihrem Durchgange durch's Unendliche imaginär wird, statt dafs sie, wie z. B. die cyklische Tangente, reell bleibt, aber entgegengesetzt wird, und es mufs also das Zeichen $\log\frac{1}{0}$ des Unendlichen von dem gewöhnlichen Zeichen $\frac{1}{0}$ des Unendlichen unterschieden werden.

3.

Ehe wir in der Ermittelung der Werthe von $\mathfrak{L}x$ für noch gröſsere Werthe von x fortschreiten, ist es zweckmäſsig, zu zeigen, daſs die Function $\mathfrak{L}x$ für jeden Werth von x unzählige Werthe hat, die nicht selten alle imaginär sind. Ist $\mathfrak{L}x = u$ einer dieser Werthe, so ist überhaupt

$$\mathfrak{L}x = u \pm 2r\pi i$$

der allgemeine Ausdruck der Werthe von $\mathfrak{L}x$; denn nimmt man auf beiden Seiten die hyperbolischen Cosinus, Sinus und Tangenten, so ist

$$\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}x = \mathfrak{Cos}(u \pm 2r\pi i) = \mathfrak{Cos}\,u = \frac{1}{\cos x},$$

$$\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}x = \mathfrak{Sin}(u \pm 2r\pi i) = \mathfrak{Sin}\,u = \operatorname{tang} x,$$

$$\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{L}x = \mathfrak{Tang}(u \pm 2r\pi i) = \mathfrak{Tang}\,u = \sin x,$$

wenn unter r eine ganze Zahl von unbestimmter Gröſse verstanden wird. Man darf also zur Zahl $\mathfrak{L}x$ ein beliebiges Vielfaches von $2\pi i$ addiren, oder auch ein solches Vielfaches davon subtrahiren, ohne daſs die hyperbolischen Functionen der Zahl $\mathfrak{L}x$, oder die cyklischen Functionen von x geändert würden.

In Bezugnahme auf diese Eigenschaft der Function $\mathfrak{L}x$ dürfen wir die Gleichung (10.) auf die Form

$$11. \quad \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \pi i + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \pi i + \mathfrak{L}'x = \mathfrak{L}'(-x)$$

beschränken; denn, wenn man auf der rechten Seite, dem Vorigen gemäſs, $2\pi i$ subtrahirt, so erhält man schon hierdurch

$$\mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\pi i + \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2}-x\right).$$

Überhaupt dürfen wir uns auf die Ermittelung der einfachsten Formen der Werthe von $\mathfrak{L}x$ beschränken, weil man aus ihnen sogleich die allgemeineren Werthe dadurch herleitet, daſs man zu ihnen noch $\pm 2r\pi i$ hinzufügt.

Setzt man in der Gleichung (11.) noch $\frac{\pi}{2}-x$ für x, so verwandelt sie sich in

$$12. \quad \mathfrak{L}(\pi - x) = \pi i + \mathfrak{L}x,$$

und diese giebt, wenn $x=0$ gesetzt wird, den Werth

$$13. \quad \mathfrak{L}\pi = \pi i.$$

Wird aber in der vorigen Gleichung $-x$ statt x gesetzt, so erhält man

$$14. \quad \mathfrak{L}(\pi + x) = \pi i - \mathfrak{L}x.$$

Wird in dieser Gleichung $\frac{\pi}{2} - x$ für x gesetzt, so erhält man

$$15.\qquad \mathfrak{L}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \pi i - \mathfrak{L}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \pi i - \mathfrak{L}'x.$$

Wird wieder $-x$ statt x gesetzt und der Werth $\mathfrak{L}'(-x) = \pi i + \mathfrak{L}'x$ substituirt, so erhält man

$$16.\qquad \mathfrak{L}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = -\mathfrak{L}'x (= 2\pi i - \mathfrak{L}'x).$$

Wird $\frac{\pi}{2} - x$ für x substituirt, so erhält man

$$17.\qquad \mathfrak{L}(2\pi - x) = 2\pi i - \mathfrak{L}x.$$

Setzt man $-x$ statt x, so hat man noch

$$18.\qquad \mathfrak{L}(2\pi + x) = 2\pi i + \mathfrak{L}x.$$

Eine einfache Folgerung hieraus ist, dafs überhaupt

$$18.\qquad \mathfrak{L}(2r\pi + x) = 2r\pi i + \mathfrak{L}x.$$

In Anwendung dieser Formeln verwandeln sich die früheren Formeln in:

$$19.\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}\left((4r+1)\frac{\pi}{2} + x\right) = (2r+1)\pi i + \mathfrak{L}'x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+2)\frac{\pi}{2} - x\right) = (2r+1)\pi i + \mathfrak{L}x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+2)\frac{\pi}{2} + x\right) = (2r+1)\pi i - \mathfrak{L}x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+3)\frac{\pi}{2} - x\right) = (2r+1)\pi i - \mathfrak{L}'x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+3)\frac{\pi}{2} + x\right) = (2r+2)\pi i - \mathfrak{L}'x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+4)\frac{\pi}{2} - x\right) = (2r+2)\pi i - \mathfrak{L}x, \\ \mathfrak{L}\left((4r+4)\frac{\pi}{2} + x\right) = (\mathfrak{L}r+2)\pi i + \mathfrak{L}x. \end{cases}$$

Als besondere Werthe stellen sich heraus:

$$\mathfrak{L}((2r+1)\pi) = (2r+1)\pi i$$

und

$$\mathfrak{L}((2r+2)\pi) = (2r+2)\pi i,$$

oder überhaupt

$$20.\qquad \mathfrak{L}(n\pi) = n\pi i.$$

Überhaupt lassen sich die vorigen Formeln (19.) zusammenfassen in der allgemeineren Formel

$$\mathfrak{L}(n\pi \pm x) = n\pi i \pm (-1)^n . \mathfrak{L}x,$$

oder

$$21. \qquad \mathfrak{L}(n\pi + x) = n\pi i + (-1)^n . \mathfrak{L}x,$$

also

$$\mathfrak{L}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} - x\right) = n\pi i + (-1)^n . \mathfrak{L}'x.$$

Man kann aber auch in den Ausdrücken auf der rechten Seite für r und n an die Stelle setzen 0, wenn sie gerade Zahlen sind, und 1, wenn sie ungerade Zahlen sind. Setzt man in der letzten Formel $-x$ statt x, so verwandelt sie sich in:

$$\mathfrak{L}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + x\right) = n\pi i + (-1)^n \pi i + (-1)^n . \mathfrak{L}'x,$$

oder

$$22. \qquad \mathfrak{L}\left((2n+1)\frac{\pi}{2} + x\right) = (n+1)\pi i + (-1)^n . \mathfrak{L}'x.$$

4.

Da $e^{\mathfrak{L}x} = \dfrac{1 + \operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{x}{2}}$ ist, so erhält man umgekehrt $\operatorname{tang}\frac{x}{2} = \frac{e^{\mathfrak{L}x} - 1}{e^{\mathfrak{L}x} + 1}$; ganz eben so ist $\operatorname{tang}\frac{y}{2} = \frac{e^{\mathfrak{L}y} - 1}{e^{\mathfrak{L}y} - 1}$, und da $\operatorname{tang}\frac{x+y}{2} = \dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{2} + \operatorname{tang}\frac{y}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{x}{2}\operatorname{tang}\frac{y}{2}}$ ist, so erhält man, wenn die Ausdrücke für $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$ und $\operatorname{tang}\frac{y}{2}$ substituirt werden, nach einer leichten Reduction den Ausdruck

$$\operatorname{tang}\frac{x+y}{2} = \frac{e^{\mathfrak{L}x + \mathfrak{L}y} - 1}{e^{\mathfrak{L}x} + e^{\mathfrak{L}y}}.$$

Da aber auch $e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \dfrac{1 + \operatorname{tang}\frac{x+y}{2}}{1 - \operatorname{tang}\frac{x+y}{2}}$ ist, so giebt die Substitution des früheren Ausdrucks die Formel

$$23. \qquad e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \frac{e^{\mathfrak{L}x} + e^{\mathfrak{L}y} + e^{\mathfrak{L}x + \mathfrak{L}y} - 1}{e^{\mathfrak{L}x} + e^{\mathfrak{L}y} - e^{\mathfrak{L}x + \mathfrak{L}y} + 1},$$

nach welcher man aus den Gröfsen $\mathfrak{L}x$ und $\mathfrak{L}y$ die Gröfse $\mathfrak{L}(x+y)$ zu berechnen hat.

Da $e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \frac{1}{0}$ ist, wenn $x + y = \frac{\pi}{2}$ oder $y = \frac{\pi}{2} - x$ gesetzt wird, so mufs in diesem Falle der Nenner des Ausdrucks $= 0$ sein. Daher hat man die Gleichung

$$e^{\mathfrak{L}x} + e^{\mathfrak{L}'x} + e^{\mathfrak{L}x + \mathfrak{L}'x} + 1 = 0.$$

oder

$$24. \qquad e^{\mathfrak{L}'x} = \frac{e^{\mathfrak{L}x}+1}{e^{\mathfrak{L}x}-1}.$$

Die Formel (23.) kann auch also dargestellt werden: $e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \frac{(e^{\mathfrak{L}x}-1)+(e^{\mathfrak{L}x}+1)e^{\mathfrak{L}y}}{(e^{\mathfrak{L}x}+1)-(e^{\mathfrak{L}x}-1)e^{\mathfrak{L}y}}$, und wird nun Zähler und Nenner durch $e^{\mathfrak{L}x}-1$ dividirt, so verwandelt sie sich in

$$25. \qquad e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \frac{1+e^{\mathfrak{L}'x}.e^{\mathfrak{L}y}}{e^{\mathfrak{L}'x}-e^{\mathfrak{L}y}};$$

eben so ist

$$26. \qquad e^{\mathfrak{L}(x-y)} = \frac{1+e^{\mathfrak{L}'x}.e^{-\mathfrak{L}y}}{e^{\mathfrak{L}'x}-e^{-\mathfrak{L}y}} = \frac{e^{\mathfrak{L}y}+e^{\mathfrak{L}'x}}{e^{\mathfrak{L}'x}.e^{\mathfrak{L}y}-1}.$$

Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, dafs die früheren Resultate in No. 3. auch aus diesen allgemeinen Formeln hergeleitet werden können.

5.

Aus der Formel (23.) kann eine Darstellung der Gröfsen $\mathfrak{L}(x+y)$ und $\mathfrak{L}(x-y)$ in den Formen

$$\mathfrak{L}(x+y) = a+b,$$
$$\mathfrak{L}(x-y) = a-b$$

hergeleitet werden, welche für den Gebrauch der vermittelnden Function von vorzüglicher Wichtigkeit ist. Wir gelangen aber in Anwendung der Formel $e^{\mathfrak{L}(x\pm y)} = \dfrac{1+\operatorname{tang}\frac{x\pm y}{2}}{1-\operatorname{tang}\frac{x\pm y}{2}}$ eben so rasch zum Ziele, und stellen diese Formel zunächst also dar:

$$e^{\mathfrak{L}(x+y)} = \frac{\cos\frac{x\pm y}{2}+\sin\frac{x\pm y}{2}}{\cos\frac{x\pm y}{2}-\sin\frac{x\pm y}{2}}.$$

Die Entwickelung des Zählers und Nenners giebt

$$e^{\mathfrak{L}(x\pm y)} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y}{2} \pm \left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\sin\frac{y}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{y}{2} \mp \left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)\sin\frac{y}{2}}.$$

Hieraus erhält man durch Multiplication:

$$e^{\mathfrak{L}(x+y)}.e^{\mathfrak{L}(x-y)} = \frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos\frac{y^2}{2}-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2\sin\frac{y^2}{2}}{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2\cos\frac{y^2}{2}-\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2\sin\frac{y^2}{2}}.$$

Dieser Ausdruck verwandelt sich durch einige Reductionen in den folgenden:

$$e^{\mathfrak{L}(x+y)+\mathfrak{L}(x-y)} = \frac{\cos y+\sin x}{\cos y-\sin x},$$

und es ist also

$$\frac{\mathfrak{L}(x+y)+\mathfrak{L}(x-y)}{2} = \log\sqrt{\left(\frac{\cos y+\sin x}{\cos y-\sin x}\right)}$$

Wird in diesem Ausdrucke x mit y vertauscht, und nicht übersehen, daſs $\mathfrak{L}(y-x) = -\mathfrak{L}(x-y)$ ist, so erhält man auch noch

$$\frac{\mathfrak{L}(x+y)-\mathfrak{L}(x-y)}{2} = \log\sqrt{\left(\frac{\cos x+\sin y}{\cos x-\sin y}\right)}.$$

Wird nun $a = \log\sqrt{\left(\frac{\cos y+\sin x}{\cos y-\sin x}\right)}$ und $b = \log\sqrt{\left(\frac{\cos x+\sin y}{\cos x-\sin y}\right)}$ gesetzt, so erhält man aus den vorigen Gleichungen durch Addition und Subtraction:

$$27. \quad \mathfrak{L}(x+y) = a+b \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}(x-y) = a-b.$$

Da aber $e^{2a} = \frac{\cos y+\sin x}{\cos y-\sin x}$ ist, so ist $\frac{e^{2a}-1}{e^{2a}+1} = \frac{e^{a}-e^{-a}}{e^{a}+e^{-a}} = \frac{\sin x}{\cos y}$ oder

$$28. \quad \mathfrak{Tang}\, a = \frac{\sin x}{\cos y} \quad \text{und eben so} \quad \mathfrak{Tang}\, b = \frac{\sin y}{\cos x}.$$

Setzt man in den vorigen Formeln $\mathfrak{L}\alpha = a$ und $\mathfrak{L}\beta = b$, so verwandeln sie sich in

$$29. \quad \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{L}(x+y) = \mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{L}\beta\\ \mathfrak{L}(x-y) = \mathfrak{L}\alpha-\mathfrak{L}\beta\end{array}\right\} \text{ für } \left\{\begin{array}{l}\sin\alpha = \frac{\sin x}{\cos y}.\\ \sin\beta = \frac{\sin y}{\cos x}.\end{array}\right.$$

Zusatz. Wird in dieser Formel $y = x$ gesetzt, so wird auch $\beta = \alpha$, und man erhält $\mathfrak{L}(2x) = 2.\mathfrak{L}\alpha$, wenn $\sin\alpha = \operatorname{tang} x$ ist, eine bekannte specielle Formel.

6.

Ehe wir uns auf die nähere Betrachtung der vorigen Resultate einlassen, welche sich durch einen hohen Grad der Einfachheit auszeichnen, geben wir noch eine zweite Art der Herleitung an, wobei wir von den Formen

$$\mathfrak{L}(x+y) = a+b \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}(x-y) = a-b$$

selbst ausgehen. Da $\mathfrak{Cos}\,\mathfrak{L}(x+y) = \frac{1}{\cos(x+y)} = \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = \mathfrak{Cos}(a+b)$ ist, so ist

$$\mathfrak{Cos}\, a\, \mathfrak{Cos}\, b + \mathfrak{Sin}\, a\, \mathfrak{Sin}\, b = \frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\cos(x+y).\cos(x-y)},$$

und eben so

$$\mathfrak{Cos}\, a\, \mathfrak{Cos}\, b - \mathfrak{Sin}\, a\, \mathfrak{Sin}\, b = \frac{\cos x\cos y-\sin x\sin y}{\cos(x+y).\cos(x-y)}.$$

Hieraus erhält man durch Addition und Subtraction die Gleichungen

$$30. \quad \mathfrak{Cos}\, a.\mathfrak{Cos}\, b = \frac{\cos x\cos y}{\cos(x+y)\cos(x-y)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Sin}\, a\; \mathfrak{Sin}\, b = \frac{\sin x\sin y}{\cos(x+y)\cos(x-y)}.$$

Da ferner $\mathfrak{Sin}\,\mathfrak{L}(x+y) = \operatorname{tang}(x+y) = \frac{\sin(x+y)\cos(x-y)}{\cos(x+y)\cos(x-y)} = \mathfrak{Sin}(a+b)$ ist, so ist

$$\mathfrak{Sin}\,a\,\mathfrak{Cos}\,b + \mathfrak{Cos}\,a\,\mathfrak{Sin}\,b = \frac{\sin x\cos x + \sin y\cos y}{\cos(x+y)\cos(x-y)},$$

und eben so

$$\mathfrak{Sin}\,a\,\mathfrak{Cos}\,b - \mathfrak{Cos}\,a\,\mathfrak{Sin}\,b = \frac{\sin x\cos x - \sin y\cos y}{\cos(x+y)\cos(x-y)}.$$

Hieraus aber entstehen durch Addition und Subtraction die Gleichungen

$$31.\quad \mathfrak{Sin}\,a.\mathfrak{Cos}\,b = \frac{\sin x\cos x}{\cos(x+y)\cos(x-y)} \text{ und } \mathfrak{Cos}\,a.\mathfrak{Sin}\,b = \frac{\sin y\cos y}{\cos(x+y)\cos(x-y)}.$$

Aus diesen Gleichungen und den vorigen erhält man durch Division, wie vorhin:

$$32.\quad \mathfrak{Tang}\,a = \frac{\sin x}{\cos y} \text{ und } \mathfrak{Tang}\,b = \frac{\sin y}{\cos x}.$$

Hieraus erhält man weiter

$$\mathfrak{Sin}\,a = \frac{\sin x}{\sqrt{(\cos y^2 - \sin x^2)}} \text{ und } \mathfrak{Sin}\,b = \frac{\sin y}{\sqrt{(\cos x^2 - \sin y^2)}},$$

oder

$$33.\quad \mathfrak{Sin}\,a = \frac{\sin x}{\sqrt{[\cos(x+y)\cos(x-y)]}} \text{ und } \mathfrak{Sin}\,b = \frac{\sin y}{\sqrt{[\cos(x+y)\cos(x-y)]}}.$$

Aus diesen und den früheren Formeln erhält man durch Division

$$34.\quad \mathfrak{Cos}\,a = \frac{\cos y}{\sqrt{[\cos(x+y)\cos(x-y)]}} \text{ und } \mathfrak{Cos}\,b = \frac{\cos x}{\sqrt{[\cos(x+y)\cos(x-y)]}}.$$

Eben dadurch findet man aber auch aus den Formeln (33.) und (34.) noch

$$35.\quad \operatorname{tang} x = \frac{\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Cos}\,b} \text{ und } \operatorname{tang} y = \frac{\mathfrak{Sin}\,b}{\mathfrak{Cos}\,a}.$$

Ferner erhält man

$$36.\quad \frac{\mathfrak{Sin}\,a}{\mathfrak{Sin}\,b} = \frac{\sin x}{\sin y},\quad \frac{\mathfrak{Cos}\,b}{\mathfrak{Cos}\,a} = \frac{\cos x}{\cos y}$$

und

$$37.\quad \mathfrak{Tang}\,a.\mathfrak{Tang}\,b = \operatorname{tang} x.\operatorname{tang} y.$$

7.

Die früheren Formeln (33.) und (34.) zeigen ganz deutlich, dafs in den Ausdrücken $\mathfrak{L}(x+y) = a+b$ und $\mathfrak{L}(x-y) = a-b$ die Gröfsen a und b imaginär sind, wenn eine der beiden Gröfsen $x+y$ und $x-y$ zwischen den Grenzen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ enthalten ist, während die andere zwischen den Grenzen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ oder zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und $\frac{5\pi}{2}$ enthalten ist.

Ist z. B. $x+y > \frac{\pi}{2}$ und $< \frac{3\pi}{2}$ und $x-y < \frac{\pi}{2}$, so ist $\mathfrak{L}(x+y)$ imaginär, und enthält den imaginären Theil πi; daher enthält sowohl

$a = \frac{\mathfrak{L}(x+y)+\mathfrak{L}(x-y)}{2}$, als auch $b = \frac{\mathfrak{L}(x+y)-\mathfrak{L}(x-y)}{2}$ den imaginären Theil $\frac{\pi i}{2}$; setzt man daher sogleich $a+\frac{\pi i}{2}$ für a, und $b+\frac{\pi i}{2}$ für b, so erhält man:

$$\mathfrak{L}(x+y) = \frac{\pi i}{2}+a+\frac{\pi i}{2}+b = \pi i+a+b$$

und

$$\mathfrak{L}(x-y) = \left(\frac{\pi i}{2}+a\right)-\left(\frac{\pi i}{2}+b\right) = a-b.$$

Zur Bestimmung von a und b dienen nun aber die Formeln

$$\mathfrak{Tang}\left(a+\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{\sin x}{\cos y} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\left(b+\frac{\pi i}{2}\right) = \frac{\sin y}{\cos x},$$

oder

$$\mathfrak{Tang}\, a = \frac{\cos y}{\sin x} \quad \text{und} \quad \mathfrak{Tang}\, b = \frac{\cos x}{\sin y},$$

und die hierdurch bestimmten Gröfsen a und b sind nun nicht imaginär, da $\cos y < \sin x$ und $\cos x < \sin y$ der Annahme gemäfs ist.

Durch die früheren Formeln ist zugleich die Aufgabe aufgelöst, die Summe $\mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{L}\beta$ und den Unterschied $\mathfrak{L}\alpha-\mathfrak{L}\beta$ der beiden Functionen $\mathfrak{L}\alpha$ und $\mathfrak{L}\beta$ in eine einzige Function derselben Art zu verwandeln. Setzt man

$$38. \qquad \mathfrak{L}\alpha+\mathfrak{L}\beta = \mathfrak{L}(x+y) \quad \text{und} \quad \mathfrak{L}\alpha-\mathfrak{L}\beta = \mathfrak{L}(x-y),$$

so sind x und y die unbekannten, hingegen α und β die gegebenen Gröfsen. Setzt man in den Formeln (35.) nun $a = \mathfrak{L}\alpha$ und $b = \mathfrak{L}\beta$, so verwandeln sie sich in

$$39. \qquad \tang x = \cos\beta . \tang\alpha \quad \text{und} \quad \tang y = \cos\alpha . \tang\beta,$$

und hiernach können die beiden unbekannten Gröfsen x und y leicht berechnet werden.

8.

Die Zerlegung $\mathfrak{L}(x+y)=a+b$ und $\mathfrak{L}(x-y)=a-b$ ist dann besonders wichtig und selbst nothwendig, wenn y imaginär ist; dann ist aber auch b imaginär. Setzt man aber yi für y und bi für b, so verwandeln sich die früheren Formeln in

$$40. \qquad \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{L}(x+yi) = a+bi \\ \mathfrak{L}(x-yi) = a-bi\end{array}\right\} \quad \text{für} \quad \left\{\begin{array}{l}\mathfrak{Tang}\, a = \frac{\sin x}{\mathfrak{Cos}\, y}, \\ \tang b = \frac{\mathfrak{Sin}\, y}{\cos x}.\end{array}\right.$$

Sollen diese Formeln nur cyklische Functionen enthalten, so wird man

$\mathfrak{L}y$ für y und $\mathfrak{L}a$ für a setzen, wodurch sie sich auf der Stelle verwandeln in

$$41.\quad \begin{cases}\mathfrak{L}(x+i\mathfrak{L}y) = \mathfrak{L}a+bi\\ \mathfrak{L}(x-i\mathfrak{L}y) = \mathfrak{L}a-bi\end{cases} \text{ für } \begin{cases}\sin a = \cos y \sin x,\\ \operatorname{tang} b = \dfrac{\operatorname{tang} y}{\cos x}.\end{cases}$$

Wollen wir jetzt auch $l(x+y)$ und $l(x-y)$ in den Formen $l(x+y)=a+b$ und $l(x-y)=a-b$ darstellen, so gelangen wir dazu leicht. Da nämlich überhaupt $\mathfrak{L}l\varphi = l\mathfrak{L}\varphi = \varphi$ ist, so folgt aus den früheren Formeln $\mathfrak{L}(x+y)=a+b$ und $\mathfrak{L}(x-y)=a-b$ sogleich $x+y = l(a+b)$ und $x-y=l(a-b)$; wir haben also nur noch a mit x und b mit y zu vertauschen. Wird diese Vertauschung auch in den Formeln (34.) vorgenommen, so erhalten wir

$$42.\quad \begin{cases}l(x+y) = a+b\\ l(x-y) = a-b\end{cases} \text{ für } \begin{cases}\operatorname{tang} a = \dfrac{\mathfrak{Sin}\, x}{\mathfrak{Cos}\, y},\\ \operatorname{tang} b = \dfrac{\mathfrak{Sin}\, y}{\mathfrak{Cos}\, x}.\end{cases}$$

Man gelangt zu denselben Formeln auch noch kürzer dadurch, dafs man in den Formeln (27.) und (28.) nur xi für x, yi für y, ai für a und bi für b setzt.

Ist endlich in den vorigen Formeln y imaginär, also auch b, so wird man yi für y und bi für b setzen, wodurch man noch erhält:

$$43.\quad \begin{cases}l(x+yi) = a+bi\\ l(x-yi) = a-bi\end{cases} \text{ für } \begin{cases}\operatorname{tang} a = \dfrac{\mathfrak{Sin}\, x}{\cos y},\\ \mathfrak{Tang}\, b = \dfrac{\sin y}{\mathfrak{Cos}\, x}.\end{cases}$$

Münster, im December 1833.

10.

Intégration d'un système d'équations linéaires du n^e ordre.

(Par Mr. *Lebesque*, prof. de Math. à Paris.)

1.

Soient y, x deux variables dépendantes de la variable t; y', y'', y''', ... x', x'', x''', ... leurs coefficients différentiels $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, etc., $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^3x}{dt^3}$, etc. Soient encore $Y = a_0 y - a_1 x' + a_2 y'' - a_3 x''' + \ldots$, $X = a_0 x + a_1 y' + a_2 x'' + a_3 y''' + \ldots$ deux fonctions de l'ordre n et à coefficients constants. Les systèmes qu'il s'agit d'intégrer sont:

$$1. \quad Y = m\cos gt, \qquad X = m\sin gt$$

et

$$2. \quad Y = -k(y\cos 2gt + x\sin 2gt), \qquad X = k(x\cos 2gt - y\sin 2gt).$$

Pour le second ordre ces équations sont celles du mouvement d'un corps solide très peu écarté de sa position d'équilibre. On peut voir leur intégration et la discussion complète de toutes les circonstances du mouvement dans le mémoire de Mr. *Poisson* sur le mouvement d'un corps solide. L'objet de cette note est de montrer rapidement que le procédé d'intégration appliqué dans le mémoire cité au système (2.) n'est point particulier au second ordre. On y verra aussi que l'intégration de chaque système se ramène à celle d'une seule équation de l'ordre $2n$ et à coefficients constants.

2.

On peut dans le système (1.) faire disparaître les seconds membres, il rentre alors dans le second où l'on ferait $k = 0$. Pour cela on posera $y = M\cos gt$, $x = M\sin gt$ et ces valeurs de y et x satisferont si l'on a

$$M(a_0 - a_1 g - a_2 g^2 + a_3 g^3 + \ldots) = m.$$

Cette équation déterminera M à moins qu'on ait

$$a_0 - a_1 g - a_2 g^2 + a_3 g^3 + \ldots = G = 0.$$

Dans ce cas il faudrait poser

$$y = (-1)^n \cdot \frac{m.\frac{d^n \cos gt}{dg^n}}{\frac{d^n G}{dg^n}}, \qquad x = (-1)^n \cdot \frac{m.\frac{d^n \sin gt}{dg^n}}{\frac{d^n G}{dg^n}},$$

où l'on prendrait pour n le plus petit nombre pour lequel le coefficient différentiel $\frac{d^n G}{dg^n}$ n'est pas nul.

Si donc on remplace les inconnues y et x par d'autres inconnues augmentees des valeurs précédentes, les seconds membres disparaîtront et les premiers resteront de même forme; on les conservera donc ici sans changer y et x; autrement on fera $m = 0$.

3.

Pour intégrer le système

$$3.\quad a_0 y - a_1 x' + a_2 y'' - a_3 x''' \ldots = 0, \quad a_0 x + a_1 y' + a_2 x'' + a_3 y''' \ldots = 0,$$

il suffira de poser $y = F\cos(\lambda t + f)$, $x = F\sin(\lambda t + f)$ et les équations seront satisfaites si l'on a l'équation de condition

$$4.\quad a_0 + a_1\lambda - a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + a_4\lambda^4 - \ldots = 0,$$

λ ayant n valeurs; l'intégrale complète que l'on trouvera en ajoutant toutes les valeurs de y et de x, relatives ceux racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ contiendra comme cela doit être $2n$ constantes arbitraires et comme on a

$$y = F\cos(\lambda t + f) = G\cos\lambda t - H\sin\lambda t,$$
$$x = F\sin(\lambda t + f) = G\sin\lambda t + H\cos\lambda t,$$

l'intégrale complète sera

$$5.\quad \begin{cases} y = \Sigma G\cos\lambda t - \Sigma H\sin\lambda t \\ x = \Sigma G\sin\lambda t + \Sigma H\cos\lambda t, \end{cases}$$

où l'on pose pour abréger

$$\Sigma G\cos\lambda t = G_1\cos\lambda_1 t + G_2\cos\lambda_2 t + \ldots$$

et ainsi des autres.

Si l'équation (4.) avait des racines égales, il faudrait modifier les formules (5.), qu'il faudrait aussi transformer dans le cas des racines imaginaires. Dans ces deux cas le temps sort de dessous les signes sin. et cos. ce qui les fait rejetter dans l'examen de la question de mécanique; car on suppose le corps écarté d'une position stable d'équilibre; ainsi les équations (5.) sont suffisantes.

4.

Mais si l'on vouloit discuter complètement les intégrales en laissant de côté la question de mécanique, il serait plus commode d'employer l'élimination qui se fait ici bien simplement. On a

$$a_0 Y + a_1 X' + a_2 Y'' + a_3 X''' + \ldots = 0, \quad a_0 X - a_1 Y + a_2 X'' - a_3 Y'' \ldots = 0.$$

Ces équations de l'ordre $2n$ se réduisent à

$$6. \quad \begin{cases} a_0^2 y + (2a_0 a_2 + a_1^2) y'' + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) y'''' + \ldots = 0, \\ a_0^2 x + (2a_0 a_1 + a_1^2) x'' + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2) x'''' + \ldots = 0. \end{cases}$$

Si donc on pose y ou $x = Fe^{\mu t}$ on aura l'équation

$$a^2 + (2a_0 a_2 + a_1^2)\mu^2 + (2a_0 a_4 + 2a_1 a_3 + a_2^2)\mu^4 + \ldots = 0$$

ou encore

$$7. \quad (a_0 + a_2\mu^2 + a_4\mu^4 \ldots)^2 + (a_1\mu + a_3\mu^3 + \ldots)^2 = 0,$$

et il est bien aisé de voir que $\mu^2 = -\lambda^2$.

On trouvera donc par les formules connues la valeur de y avec $2n$ constantes arbitraires; on aura aussi celle de x avec $2n$ autres constantes arbitraires qui se détermineront au moyen des premières, car les équations (3.) doivent être satisfaites indépendamment de t, ce qui donne $2n$ équations de condition. Les formules ainsi trouvées rentreront dans celles données plus haut, au moyen de $\mu^2 = -\lambda^2$, ainsi qu'on peut le vérifier très aisément.

5.

Pour intégrer le second système

$$a_0 y - a_1 x' + a_2 y'' - a_3 x''' \ldots = -K(y \cos 2gt + x \sin 2gt),$$
$$a_0 x + a_1 y' + a_2 x'' + a_3 y''' \ldots = K(x \cos 2gt - y \sin 2gt),$$

il suffit de poser

$$y = A \sin u + B \sin v, \qquad x = -A \cos u - A \cos v,$$

u et v étant de nouvelles variables. La substitution donnera

$$A(a_0 - a_1 u' - a_2 u'^2 + \ldots) \sin u + B(a_0 - a_1 v' - a_2 v'^2 + \ldots) \sin v$$
$$+ P u'' + \ldots P_1 v'' + \ldots = AK \sin(2gt - u) + BK \sin(2gt - v)$$

et une autre équation toute semblable ou les sinus seront remplacés par les cosinus.

On satisfera à la fois à ces deux équations en posant $u = 2gt - v$, d'où $v = 2gt - u$, et

$$A(a_0 - a_1 u' - a_2 u'^2 + \ldots) = BK, \quad B(a_0 - a_1 v' - a_2 v'^2 + \ldots) = AK.$$

Car u' et v' étant constantes, u'', u''', ... v'', v''', ... seront $=0$ et les deux équations satisfaites.

Si l'on fait $u-v=2\lambda t+2f$, comme $u+v=2gt$, on aura

$$u=(g+\lambda)t+f,\quad v=(g-\lambda)t-f,\quad u'=g+\lambda,\quad v'=g-\lambda,$$

les équations de condition deviendront

$$A(a_0-a_1(g+\lambda)-a_2(g+\lambda)^2+\dots)=BK,$$
$$B(a_0-a_1(g-\lambda)-a_2(g-\lambda)^2+\dots)=AK,$$

En les multipliant membre à membre on aura

$$8.\quad (a_0-a_1(g+\lambda)-a_2(g+\lambda)^2+\dots)(a_0-a_1(g-\lambda)-a_2(g-\lambda)^2+\dots)=K^2.$$

En les ajoutant membre et en croix et posant pour abréger

$$9.\quad \begin{cases} r=a_0+K-a_1(g-\lambda)-a_2(g-\lambda)^2+\dots, \\ s=a_0+K-a_1(g+\lambda)-a_2(g+\lambda)^2+\dots, \\ \text{(d'où } rs-K(r+s)=0), \end{cases}$$

on aura $As=Br$ et par suite $A=rF$, $B=sF$, donc

$$10.\quad \begin{cases} y=\quad rF\sin[(g+\lambda)t+f]+sF[\sin(g-\lambda)t-f], \\ x=-rF\cos[(g+\lambda)t+f]-sF[\cos(g-\lambda)t-f]. \end{cases}$$

Si l'on fait $F\cos f=G$, $F\sin f=H$, on aura encore

$$11.\quad \begin{cases} y=r[G\sin(g+\lambda)t+H\cos(g+\lambda)t]+s[G\sin(g-\lambda)t-H\cos(g-\lambda)t], \\ x=r[H\sin(g+\lambda)t-G\cos(g+\lambda)t]-s[H\sin(g-\lambda)t+G\cos(g-\lambda)t], \end{cases}$$

ou enfin

$$12.\quad \begin{cases} y=(r-s)(G\sin\lambda t+H\cos\lambda t)\cos gt+(r+s)(G\cos\lambda t-H\sin\lambda t)\sin gt], \\ x=(r-s)(G\sin\lambda t+H\cos\lambda t)\sin gt-(r+s)(G\cos\lambda t-H\sin\lambda t)\sin gt]. \end{cases}$$

Ce procédé d'intégration est celui employé par M. *Poisson* pour les équations du second ordre; on voit qu'il conduit très facilement à l'intégrale complète quand l'équation en λ n'a que des racines réelles et inégales, ce qui suffit pour la question de mécanique. Mais quand l'équation (8.) a des racines égales et pour quelques autres cas particuliers dont on dira un mot plus bas, il sera plus commode d'employer le procédé suivant.

6.

On posera

$$y=P\cos gt+Q\sin gt,\qquad x=P\sin gt-Q\cos gt,$$

substitution indiquée par les formules (12.). La différentiation donnera

$$y'=P_1\cos gt+Q_1\sin gt,\qquad y''=P_2\cos gt+Q_2\sin gt,$$
$$y'''=P_3\cos gt+Q_3\sin gt,\quad \text{etc.}$$
$$x'=P_1\sin gt-Q_1\cos gt,\qquad x''=P_2\sin gt-Q_2\cos gt,$$
$$x'''=P_3\sin gt-Q_3\cos gt,\quad \text{etc.}$$

sous les relations

$P_1 = P' + gQ$, $P_2 = P'' + 2gQ' - g^2P$, $P_3 = P''' + 3gQ'' - 3g^2P' - g^3Q$, etc.
$Q_1 = Q' - gP$, $Q_2 = Q'' - 2gP' - g^2Q$, $Q_3 = Q''' - 3gP'' - 3g^2Q' + g^3P$, etc.
dont la loi est évidente aussi bien pour les lettres que pour les coefficients et les signes.

Or en substituant et en égalant entre eux les coefficients de $\sin gt$ et $\cos gt$ on trouve

$a_0Q - a_1P_1 + a_2Q_2 - a_3P_3 \ldots = KQ$, $a_0P + a_1Q_1 + a_2P_2 + a_3Q_3 + \ldots = -KP$.
Remplaçant $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots Q_1, Q_2, Q_3, \ldots\ldots$ par leurs valeurs en posant pour abréger $a - a_1g - a_2g^2 + a_3g^3 + \ldots = G$ et $A_0 = G$, $A_1 = G'$, $A_2 = -\frac{1}{1.2}G''$, $A_3 = -\frac{1}{2.3}G'''$, $A_4 = \frac{1}{2.3.4}G'''$, etc. on trouvera

$$13. \quad \begin{cases} A_0P - A_1Q' + A_2P'' - A_3Q''' + \ldots = -KP, \\ A_0Q + A_3P' + A_2Q'' + A_3P'' + \ldots = +KQ. \end{cases}$$

Ces équations sont évidemment celles qu'on obtiendrait en posant $g = 0$ et remplacant $a_0, a_1, \ldots\ldots$ par $A_0, A_1, \ldots\ldots$ dans les équations (1.).

L'élimination se fait encore ici très facilement. On posera

$$(A_0 + K)P - A_1Q' + A_2P'' - A_3Q''' + \ldots = Y_1 = 0,$$
$$(A_0 - K)Q + A_1P' + A_2Q'' + A_3P''' + \ldots = X_1 = 0,$$

et les équations

$$(A_0 - K)Y_1 + A_1X_1' + A_2Y_1'' + A_3X_1''' + \ldots = 0,$$
$$(A_0 + K)X_1 - A_1Y_1' + A_2X_1'' - A_3Y_1''' + \ldots = 0,$$

se réduiront à

$$14. \quad \begin{cases} (A_0^2 - K^2)P + (2A_0A_2 + A_1^2)P'' + (2A_0A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2)P'''' \ldots = 0, \\ (A_0^2 - K^2)Q + (2A_0A_2 + A_1^2)Q'' + (2A_0A_4 + 2A_1A_3 + A_2^2)Q'''' \ldots = 0, \end{cases}$$

Si dans ces équations de l'ordre $2n$, où il faut éffacer tous les termes où A prend un indice plus grand que n, on pose P ou $Q = Fe^{\mu t}$, l'équation en μ sera, comme on l'a vu plus haut,

$$15. \quad (A_0 + A_2\mu^2 + A_4\mu^4 + \ldots)^2 + (A_1\mu + A_3\mu^3 + \ldots)^2 - K^2 = 0$$

et l'on verra encore que $\mu^2 = -\lambda^2$.

Les quantités P et Q renfermeront donc chacune $2n$ constantes arbitraires, mais celles de Q se détermineront en fonction de celles de P, par la substitution dans les équations (13.). L'équation $\mu^2 = -\lambda^2$ donnera le moyen de passer de l'intégrale en μ à l'intégrale en λ.

Il serait fort inutile de faire ici cette transformation et de construire des formules générales; on se contentera d'ajouter que le cas $\lambda = 0$, pour

lequel on n'a pas le nombre suffisant de constantes, se trouvera facilement par le second procédé; le temps sortira de dessous les signes sin. et cos. Pour le cas $r = s$ ($2K$ ou 0) on pourra dans la formule (11.) supprimer le facteur commun, mais si cependant on avait $r = s = 0$, on ne le pourrait plus; il faudrait préalablement changer les signes des termes multipliés par r. Il est facile de voir, que cela revient encore à faire $Q = 0$.

7.

Si l'on compare l'intégration des équations linéaires ordinaires à coefficients constants, au premier procédé d'intégration, on verra que le succès de l'une tient à ce que l'on emploie dans l'intégrale incomplète une fonction qui se reproduit à chaque différentiation; et celui de l'autre à ce qu'on emploie des fonctions qui, au signe près, se reproduisent après deux différentiations, ce qui permet de partager chacune des équations en deux autres. On conçoit d'après cela qu'on employant des fonctions qui se reproduisent après trois différentiations ou plus, on puisse trouver des systèmes de trois équations ou plus, susceptibles de s'intégrer d'une manière analogue. Ce serait une question digne d'examen, bien que la forme des fonctions que la différentiation reproduit périodiquement, porte à croire que ces systèmes se présenteraient rarement dans les applications.

8.

Le procédé direct, mais long de l'élimination, peut s'appliquer, en général, à plusieurs équations linéaires à coefficients constants, entre tant de variables x, y, ... t qu'on voudra. Cette élimination, toujours facile, puisqu'elle se fera entre équations du 1e degré, devra, comme cela est arrivé plus haut, conduire à une même équation linéaire à coefficients constants. En effet puisque y, x, ... sont nécessairement données par des équations linéaires à coefficients constants, on ne voit pas comment les équations données pourraient être satisfaites indépendamment de t, si x, y, ... contenaient des exponentielles différentes, ou n'étaient pas données par une même équation. Au reste ceci n'est qu'un aperçu et la démonstration complète demanderait quelque développement.

11.
Bemerkungen zum Principe der doppelten Substitution bei den elliptischen Functionen.

(Von Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

Das Princip der doppelten Substitution bei den elliptischen Functionen besteht darin, dafs das Integral der Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-c_1^2y^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-c^2x^2)}}$$

unverändert bleibt, wenn in demselben y in $\frac{1}{c_1 y}$ und x in $\frac{1}{cx}$ übergeht. Der berühmte Verfasser der *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum* machte zuerst diese glückliche Bemerkung, die Legendre, ihrer hohen Wichtigkeit wegen, zum Principe erhob.

Den nähern Zusammenhang dieses Princips mit der Fundamentalgleichung der elliptischen Functionen sollen die folgenden Zeilen zeigen.

Bekanntlich wird das Integral der Differenzialgleichung

$$1.\quad \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi'^2)}} \text{ durch}$$

$$\cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'.\sqrt{(1-c^2\sin\theta^2)} = \cos\theta$$

vorgestellt, wo θ die willkürliche Constante der Integration bedeutet.

Setzt man nun $i = \tang\theta$, so geht die letzte Gleichung über in:

$$2.\quad \sqrt{(1+i^2)}\cos\varphi\cos\varphi' + \sqrt{(1+(1-c^2)i^2)}\sin\varphi\sin\varphi' = 1,$$

wo i die Stelle der willkürlichen Constante einnimmt.

Da nun diese Gleichung für jeden willkürlichen Werth von i die Differenzialgleichung (1.) zu einer identischen macht, so mufs ein Gleiches jede aus derselben durch eine specielle Annahme für i gefolgerte Gleichung bewirken; wodurch, wie wir sogleich zeigen wollen, eben so viele doppelte Substitutionen hervorgehen, als der Gröfse i constante Werthe beigelegt werden können.

In der That, setzt man $i = \sqrt{-1}$, so geht die Gleichung (2.) über in

$$c\sin\varphi\sin\varphi' = 1.$$

Diese Gleichung, als particuläres Integral der Differenzialgleichung (1.), zeigt, dafs die Differenzialformel $\frac{d\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi'^2)}}$ durch die Annahme von $\sin\varphi' = \frac{1}{c\sin\varphi}$, in $\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}}$ übergeht.

Hat man demnach die Differenzialgleichung

$$3.\quad \frac{d\psi}{\sqrt{(1-c_1^2\sin\psi^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}},$$

wo μ eine Constante vorstellt, und führt zwei neue Variabeln ψ' und φ' durch die Gleichungen $c_1\sin\psi\sin\psi' = 1$, $c\sin\varphi\sin\varphi' = 1$ ein, so geht die Gleichung (3.), wegen

$$\frac{d\psi}{\sqrt{(1-c_1^2\sin\psi^2)}} = \frac{d\psi'}{\sqrt{(1-c_1^2\sin\psi'^2)}} \quad\text{und}\quad \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi^2)}} = \frac{d\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi'^2)}},$$

in folgende über: 4. $\frac{d\psi'}{\sqrt{(1-c_1^2\sin\psi'^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\varphi'}{\sqrt{(1-c^2\sin\varphi'^2)}}$,
woraus gefolgert werden kann, dafs wenn die Integralgleichung von (3.) durch

$$5.\qquad \Omega(\varphi,\psi) = 0$$

vorgestellt wird, wobei Ω irgend ein Functionszeichen bedeutet, die Integralgleichung von (4.) ebenfalls durch

$$6.\qquad \Omega(\varphi',\psi') = 0$$

dargestellt sein wird. Allein aus der Integralrechnung ist bekannt, dafs man aus der Gleichung (6.) zur Gleichung (5.) gelangen mufs, wenn man die neu eingeführten Gröfsen φ', ψ' durch die Ursprünglichen φ und ψ mit Hülfe der Gleichungen

$$\sin\psi' = \frac{1}{c_1\sin\psi},\qquad \sin\varphi' = \frac{1}{c\sin\varphi}$$

ersetzt, woraus also erhellet, dafs die Gleichung (6.) unverändert bleibt, wenn $\sin\psi'$ in $\frac{1}{c_1\sin\psi'}$ und $\sin\varphi'$ in $\frac{1}{c\sin\varphi'}$ umgetauscht wird, oder auch, dafs die Gleichung (5.), als Integralgleichung der Differenzialgleichung (3.), ungeändert bleibt, wenn $\sin\varphi$ in $\frac{1}{c\sin\varphi}$ und $\sin\psi$ in $\frac{1}{c_1\sin\psi}$ übergeht.

Setzt man also in (3.) $y = \sin\psi$ und $x = \sin\varphi$, so hat man

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-c_1^2y^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-c^2x^2)}},$$

deren Integralgleichung unverändert bleibt, wenn gleichzeitig y in $\frac{1}{c_1y}$ und x in $\frac{1}{cx}$ übergeht, oder, wenn in (3.) $y = \sqrt{c_1}.\sin\psi$ und $x = \sqrt{c}.\sin\varphi$ gesetzt wird, wodurch sie in

$$\frac{dy}{\sqrt{(c_1-y^2)}\sqrt{(1-c_1y^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(c-x^2)}\sqrt{(1-cx^2)}}$$

übergeht, so hat das Integral dieser Gleichung die Eigenschaft, unverändert zu bleiben, wenn y und x in ihre reciproken Werthe umgesetzt werden.

Eine zweite Methode der doppelten Substitution, die sich eben so einfach als die von Jacobi angegebene anwenden läfst, entspringt aus der Gleichung (2.), wenn daselbst $i = \infty$ angenommen wird.

Man hat dann, wenn c' das Complement zum Modul c ist, $c'\tang\varphi\tang\varphi' = 1$. Setzt man also in (3.) $y = \sqrt{c'_1}.\tang\psi$ und $x = \sqrt{c'}.\tang\varphi$, wo c'_1 und c' respective die Complemente von c_1 und c sind, so geht sie über in:

$$\frac{dy}{\sqrt{(c'_1+y^2)}\sqrt{(1+c'_1y^2)}} = \frac{1}{\mu}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(c'+x^2)}\sqrt{(1+c'x^2)}},$$

von deren Integralgleichung ebenfalls nachgewiesen werden kann, dafs sie unverändert bleibt, wenn y und x in ihre reciproken Werthe übergehen.

Setzt man ferner in (2.) $i = \frac{\sqrt{-1}}{c'}$, so hat man

$$\frac{c}{c'}\sqrt{-1}\cos\varphi\cos\varphi' = 1,$$

welche Gleichung abermals eine doppelte Substitutionsmethode darbieten wird.

Zürich, den 10. September 1835.

12.

De integralibus quibusdam duplicibus, quae post transformationem variabilium in eandem formam redeunt.

(Auct. C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

1.

Notum est, propositis aequationibus

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \alpha\cos\eta + \beta\sin\eta\cos\vartheta + \gamma\sin\eta\sin\vartheta,\\ \sin\varphi\cos\psi &= \alpha'\cos\eta + \beta'\sin\eta\cos\vartheta + \gamma'\sin\eta\sin\vartheta,\\ \sin\varphi\sin\psi &= \alpha''\cos\eta + \beta''\sin\eta\cos\vartheta + \gamma''\sin\eta\sin\vartheta,\end{aligned}$$

ubi inter coëfficientes habentur relationes

$$\begin{aligned}\alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' &= 1, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' &= 0,\\ \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' &= 1, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' &= 0,\\ \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' &= 1, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' &= 0,\end{aligned}$$

fieri

$$\iint U \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi = \iint U \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta,$$

ubi in altero integrali U per φ, ψ, in altero per η, ϑ exprimendum est. Aequatio

$$\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi = \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta$$

suggerit exemplum simplicissimum, quo elementum integralis duplicis post transformationem variabilium in eandem formam redit. Substitutiones propositae sunt formulae notae pro transformatione coordinatarum orthogonalium, quarum initium non mutatur. Elementum integralis est elementum superficiei sphaericae, expressum per coordinatas puncti superficiei orthogonales, quarum initium in centro; quod elementum formam mutare non debet, si coordinatae orthogonales, per quod exprimatur, ad aliud systema axium referatur, quod eodem initio gaudet.

Dedi in tomo VIII. huius Diarii pag. 552 sqq. alterum exemplum generalius et valde complicatum, quo integrale duplex post transformationem variabilium in eandem formam redibat. Statuamus enim propositas esse duas aequationes inter $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ lineares,

$$0 = A + A' \cos\eta + A'' \sin\eta \cos\vartheta + A''' \sin\eta \sin\vartheta,$$
$$0 = B + B' \cos\eta + B'' \sin\eta \cos\vartheta + B''' \sin\eta \sin\vartheta,$$

in quibus octo quantitates $A, A', \ldots, B, B', \ldots$ sunt expressiones et ipsae lineares quantitatum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$; patet, iisdem aequationibus conciliari etiam posse formam,

$$0 = C + C' \cos\varphi + C'' \sin\varphi \cos\psi + C''' \sin\varphi \sin\psi,$$
$$0 = D + D' \cos\varphi + D'' \sin\varphi \cos\psi + D''' \sin\varphi \sin\psi,$$

ubi $C, C', \ldots, D, D', \ldots$ sunt expressiones lineares ipsarum $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$. Quibus positis, demonstravi l. c., statuto

$$F = A + A' \cos\eta + A'' \sin\eta \cos\vartheta + A''' \sin\eta \sin\vartheta$$
$$= C + C' \cos\varphi + C'' \sin\varphi \cos\psi + C''' \sin\varphi \sin\psi,$$
$$\Pi = B + B' \cos\eta + B'' \sin\eta \cos\vartheta + B''' \sin\eta \sin\vartheta$$
$$= D + D' \cos\eta + D'' \sin\eta \cos\vartheta + D''' \sin\eta \sin\vartheta,$$
$$R = [A'A' + A''A'' + A'''A''' - AA][B'B' + B''B'' + B'''B''' - BB]$$
$$- [A'B' + A''B'' + A'''B''' - AB]^2,$$
$$S = [C'C' + C''C'' + C'''C''' - CC][D'D' + D''D'' + D'''D''' - DD]$$
$$- [C'D' + C''D'' + C'''D''' - CD]^2,$$

ex aequationibus $F = 0$, $\Pi = 0$, sequi

$$\iint \frac{U \sin\eta \, d\eta \, d\vartheta}{\sqrt{R}} = \iint \frac{U \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\sqrt{S}}.$$

Si aequationes $F = 0$, $\Pi = 0$ ita accipiuntur, ut commutatis $\cos\eta$, $\sin\eta\cos\vartheta$, $\sin\eta\sin\vartheta$ cum $\cos\varphi$, $\sin\varphi\cos\psi$, $\sin\varphi\sin\psi$ immutatae maneant, aut ea commutatione altera in alteram abeant, elementa inter se aequalia

$$\frac{\sin\eta \, d\eta \, d\vartheta}{\sqrt{R}} = \frac{\sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\sqrt{S}}$$

plane eandem formam habent. Eodem enim modo alterum per η, ϑ atque alterum per φ, ψ exprimitur.

2.

Tradam sequentibus duo nova exempla eiusmodi transformationis, quae elementi integralis duplicis formam immutatam relinquit. Eum in finem antemittimus sequentia.

Sint $f = 0$, $\Phi = 0$ duae aequationes propositae inter quantitates x, y et p, q; si elementum $dx\,dy$ per variabiles p, q exprimere placet, habetur formula nota,

$$[f'(x)\Phi'(y) - f'(y)\Phi'(x)]\,dx\,dy = [f'(p)\Phi'(q) - f'(q)\Phi'(p)]\,dp\,dq.$$

Si f, Φ continent praeter x, y variabilem z, quae ab iis pendet per aequa-

tionem $\Pi(x, y, z) = 0$, unde

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\Pi'(x)}{\Pi'(z)}, \qquad \frac{dz}{dy} = -\frac{\Pi'(y)}{\Pi'(z)},$$

loco expressionis

$$f'(x)\,\Phi'(y) - f'(y)\,\Phi'(x)$$

ponendum erit

$$\left[f'(x) - \frac{\Pi'(x) f'(z)}{\Pi'(z)}\right]\left[\Phi'(y) - \frac{\Pi'(y)\varphi'(z)}{\Pi'(z)}\right]$$
$$-\left[f'(y) - \frac{\Pi'(y) f'(z)}{\Pi'(z)}\right]\left[\Phi'(x) - \frac{\Pi'(x)\varphi'(z)}{\Pi'(z)}\right] = \frac{N}{\Pi'(z)},$$

siquidem statuitur:

$$N = \Pi'(x)[f'(y)\Phi'(z) - f'(z)\Phi'(y)] + \Pi'(y)[f'(z)\Phi'(x) - f'(x)\Phi'(z)]$$
$$+ \Pi'(z)[f'(x)\Phi'(y) - f'(y)\Phi'(x)].$$

Eodem modo, si f, Φ praeter p, q continent variabilem r, quae ab iis pendet per aequationem $P(p, q, r) = 0$, loco $f'(p)\Phi'(q) - f'(q)\Phi'(p)$ ponendum erit $\frac{O}{P'(r)}$, siquidem

$$O = P'(p)[f'(q)\Phi'(r) - f'(r)\Phi'(q)] + P'(q)[f'(r)\Phi'(p) - f'(p)\Phi'(r)]$$
$$+ P'(r)[f'(p)\Phi'(q) - f'(q)\Phi'(p)].$$

Quibus positis, aequatio inter elementa fit

$$\frac{N\,dx\,dy}{\Pi'(z)} = \frac{O\,dp\,dq}{P'(r)}.$$

Sit

$$\Pi = \tfrac{1}{2}(xx + yy + zz - 1) = 0,$$
$$P = \tfrac{1}{2}(pp + qq + rr - 1) = 0,$$

erit

$$N = x[f'(y)\Phi'(z) - f'(z)\Phi'(y)] + y[f'(z)\Phi'(x) - f'(x)\Phi'(z)]$$
$$+ z[f'(x)\Phi'(y) - f'(y)\Phi'(x)],$$
$$O = p[f'(q)\Phi'(r) - f'(r)\Phi'(q)] + q[f'(r)\Phi'(p) - f'(p)\Phi'(r)]$$
$$+ r[f'(p)\Phi'(q) - f'(q)\Phi'(r)],$$

et aequatio inter elementa,

$$\frac{N\,dx\,dy}{z} = \frac{O\,dp\,dq}{r}.$$

Statuamus porro, functiones f, Φ respectu variabilium x, y, z esse *homogeneas*, erit

$$x f'(x) + y f'(y) + z f'(z) = \mu f = 0,$$
$$x \Phi'(x) + y \Phi'(y) + z \Phi'(z) = \mu' \Phi = 0,$$

ubi μ, μ' sunt dimensiones functionum homogenearum f, Φ. Sequitur autem ex aequationibus,

$$\begin{aligned} xf'(x)+yf'(y)+zf'(z) &= 0,\\ x\varphi'(x)+y\varphi'(y)+z\varphi'(z) &= 0,\\ xx \quad +yy \quad +zz \quad &= 1, \end{aligned}$$

si eas consideramus ut aequationes lineares inter tres incognitas x, y, z propositas atque ut tales resolvimus,

$$\begin{aligned} Nx &= f'(y)\varphi'(z)-f'(z)\varphi'(y),\\ Ny &= f'(z)\varphi'(x)-f'(x)\varphi'(z),\\ Nz &= f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x). \end{aligned}$$

Supponamus $f=0$, esse aequationem respectu ipsarum x, y, z linearem,

$$f = gx+hy+iz = 0,$$

unde

$$f'(x) = g, \qquad f'(y) = h, \qquad f'(z) = i;$$

porro $\varphi=0$ respectu ipsarum x, y, z esse secundi ordinis,

$$\varphi = \tfrac{1}{2}[ax^2+by^2+cz^2+2dyz+2ezx+2fxy] = 0,$$

unde

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= ax+fy+ez,\\ \varphi'(y) &= fx+by+dz,\\ \varphi'(z) &= ex+dy+cz. \end{aligned}$$

Quibus substitutis in aequationibus antecedentibus, prodit:

$$\begin{aligned} Nx &= (he-if)x+(hd-ib)y+(hc-id)z,\\ Ny &= (ia-ge)x+(if-gd)y+(ie-gc)z,\\ Nz &= (gf-ha)x+(gb-hf)y+(gd-he)z. \end{aligned}$$

Quibus per g, h, i multiplicatis et additis, fit, quod debet,

$$gx+hy+iz = 0.$$

Si hanc aequationem iungimus duabus e tribus antecedentibus, ex. gr. duabus postremis, atque ex aequationibus

$$\begin{aligned} 0 &= gx+hy+iz,\\ 0 &= (ia-ge)x+[if-gd-N]y+(ie-gc)z,\\ 0 &= (gf-ha)x+(gb-hf)y+[gd-he-N]z, \end{aligned}$$

eliminamus x, y, z, videbimus, in aequatione proveniente terminos in primam ipsius N potestatem ductos destrui, eamque fieri post divisionem per g factam,

$$\begin{aligned} N^2 = {} & g^2(d^2-bc)+h^2(e^2-ca)+i^2(f^2-ab)\\ & +2hi(da-ef)+2ig(eb-fd)+2gh(fc-de)\,^{*}). \end{aligned}$$

*) Aequationem $N=0$ adnoto esse aequationem conditionalem, ut planum et conus, quae per aequationes $f=0$, $\varphi=0$ repraesentantur, se mutuo tangant.

Supponamus iam:

1°. coëfficientes a, b, c, d, e, f esse functiones homogeneas secundi ordinis quascunque ipsarum p, q, r; coëfficientes vero g, h, i earundem quantitatum esse functiones homogeneas lineares. Unde patet, duas aequationes propositas etiam hoc modo repraesentari posse:

$$f = g'p + h'q + i'r = 0,$$

$$2\Phi = a'pp + b'qq + c'rr + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq = 0,$$

designantibus g', h', i' ipsarum x, y, z functiones homogeneas lineares, a', b', c', d', e', f' earundum quantitatum functiones homogeneas secundi ordinis. Vel supponamus

2°. coëfficientes a, b, c, d, e, f esse functiones homogeneas lineares ipsarum p, q, r; coëfficientes vero g, h, i homogeneas secundi ordinis: aequationes propositae hoc modo repraesentari possunt:

$$f = \tfrac{1}{2}[a'pp + b'qq + c'rr + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq] = 0,$$

$$\Phi = g'p + h'q + i'r = 0,$$

designantibus a', b', c', d', e', f' ipsarum x, y, z functiones homogeneas lineares, g', h', i' homogeneas secundi ordinis.

Utroque casu plane per easdem formulas, quibus ipsius NN valorem eruimus, invenitur:

$$OO = g'^2(d'^2 - b'c') + h'^2(e'^2 - c'a') + i'^2(f'^2 - a'b')$$
$$+ 2h'i'(d'a' - e'f') + 2i'g'(e'b' - f'd') + 2g'h'(f'c' - d'e').$$

Unde prodeunt duo theoremata sequentia.

Theorema 1.

„Sint propositae inter quantitates x, y, z, p, q, r duae aequationes, altera respectu ipsarum x, y, z nec non respectu ipsarum p, q, r homogenea linearis, altera respectu ipsarum x, y, z nec non respectu ipsarum p, q, r homogenea secundi ordinis; quae sint aequationes:

$$0 = gx + hy + iz = g'p + h'q + i'r,$$

$$0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy$$
$$= a'p^2 + b'q^2 + c'r^2 + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq,$$

ubi g, h, i ipsarum p, q, r et g', h', i' ipsarum x, y, z designant functiones quascunque homogeneas lineares; a, b, c, d, e, f ipsarum p, q, r et a', b', c', d', e', f' ipsarum x, y, z functiones quascunque homogeneas secundi ordinis; sit

$$xx + yy + zz = 1, \qquad pp + qq + rr = 1,$$

erit

$$\iint \frac{U\,dp\,dq}{r\sqrt{[g^2(d^2-bc)+h^2(e^2-ca)+i^2(f^2-ab)+2hi(da-ef)+2ig(eb-fd)+2gh(fc-de)]}} =$$
$$\iint \frac{U\,dx\,dy}{z\sqrt{[g'^2(d'^2-b'c')+h'^2(e'^2-c'a')+i'^2(f'^2-a'b')+2h'i'(d'a'-e'f')+2i'g'(e'b'-f'd')+2g'h'(f'c'-d'e')]}}."$$

Theorema 2.

„Sint propositae inter quantitates x, y, z, p, q, r duae aequationes, altera respectu ipsarum x, y, z homogenea linearis, respectu ipsarum p, q, r homogenea secundi ordinis; altera respectu ipsarum x, y, z homogenea secundi ordinis, respectu ipsarum p, q, r homogenea linearis; quae sint aequationes:

$$0 = gx + hy + iz = a'p^2 + b'q^2 + c'r^2 + 2d'qr + 2e'rp + 2f'pq,$$
$$0 = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dyz + 2ezx + 2fxy = g'p + h'q + i'r,$$

ubi g, h, i ipsarum p, q, r et g', h', i' ipsarum x, y, z designant functiones homogeneas secundi ordinis quascunque; a, b, c, d, e, f ipsarum p, q, r et a', b', c', d', e', f' ipsarum x, y, z functiones homogeneas lineares quascunque; sit

$$xx + yy + zz = 1, \qquad pp + qq + rr = 1,$$

erit:

$$\iint \frac{U\,dp\,dq}{r\sqrt{[g^2(d^2-bc)+h^2(e^2-ca)+i^2(f^2-ab)+2hi(da-ef)+2ig(eb-fd)+2gh(fc-de)]}} =$$
$$\iint \frac{U\,dx\,dy}{z\sqrt{[g'^2(d'^2-b'c')+h'^2(e'^2-c'a')+i'^2(f'^2-a'b')+2h'i'(d'a'-e'f')+2i'g'(e'b'-f'd')+2g'h'(f'c'-d'e')]}}."$$

Si statuimus

$$x = \cos\varphi, \quad y = \sin\varphi\cos\psi, \quad z = \sin\varphi\sin\psi,$$
$$p = \cos\eta, \quad y = \sin\eta\cos\vartheta, \quad z = \sin\eta\sin\vartheta,$$

habemus

$$\frac{dx\,dy}{z} = \sin\varphi\, d\varphi\, d\psi, \qquad \frac{dp\,dq}{r} = \sin\eta\, d\eta\, d\vartheta.$$

Si aequationes propositae ita comparatae sunt in theoremate 1., ut commutatis x, y, z cum p, q, r immutatae maneant, vel in theoremate 2. ita comparatae, ut ea mutatione altera in alteram abeat: integralia duplicia inter se aequalia, si $U = 1$, sub signo integrationis plane easdem expressiones continent, alterum ipsarum p, q, r, alterum ipsarum x, y, z. Unde theoremata apposita suggerunt nova exempla integralium duplicium inter limites quoscunque sumtorum, in quibus certa ratione algebraica limites mutari queant, ipsis integralium valoribus immutatis manentibus.

Regiomonti d. 2. Sept. 1835.

13.

Formulae novae in theoria transcendentium ellipticarum fundamentales.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

1.

Extat inter differentias quatuor quantitatum w, x, y, z relatio identica nota et frequentissimi usus:

$$(w-x)(y-z)+(w-y)(z-x)+(w-z)(x-y) = 0.$$

Quae relatio, quod et ipsum notum est, ea insigni gaudet proprietate, ut valeat adhuc, si in locum differentiarum earum sinus ponantur, unde prodit:

$$\sin(w-x)\sin(y-z)+\sin(w-y)\sin(z-x)+\sin(w-z)\sin(x-y) = 0.$$

Quae formula, posito

$$w-x=a, \quad x-y=u, \quad y-z=b,$$

etiam sic exhiberi potest:

$$\sin a \sin b + \sin u \sin(u+a+b) = \sin(u+a)\sin(u+b).$$

Formulam quaerens antecedentis similem in theoria functionum ellipticarum, ita egi.

In formula nota pro additione integralium ellipticorum:

$$\sin\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v + \sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1-k^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}v}$$

statuamus $u+a$ loco u, $u+b$ loco v, ac consideremus a, b ut constantes, u ut variabilem: formulam antecedentem ita repraesentare licet:

$$1.\quad \sin\operatorname{am}(2u+a+b) = \frac{d.[\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)]}{[1-k^2\sin^2\operatorname{am}(u+a)\sin^2\operatorname{am}(u+b)]\,du},$$

unde integratione facta prodit:

$$2.\quad \int_0^u \sin\operatorname{am}(2u+a+b)\,du = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)}{1-k\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)} - \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b}{1-k\sin\operatorname{am}a\sin\operatorname{am}b}.$$

Expressio ad laevam eadem manet, quoties $a+b$ eadem fit, unde etiam expressio ad dextram valorem mutare non debet, si b ponamus $=0$, atque loco a scribamus $a+b$. Hinc si a logarithmis ad numeros ascendimus, provenit aequatio:

$$3.\quad \frac{[1+k\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)][1-k\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b]}{[1-k\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)][1+k\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b]} = \frac{1+k\sin\mathrm{am}(u+a+b)\sin\mathrm{am}\,u}{1-k\sin\mathrm{am}(u+a+b)\sin\mathrm{am}(u)}.$$

Si expressionem ad laevam ponimus

$$\frac{P+kQ}{P-kQ} = \frac{1+k\sin\mathrm{am}(u+a+b)\sin\mathrm{am}\,u}{1-k\sin\mathrm{am}(u+a+b)\sin\mathrm{am}\,u},$$

ubi

$$P = 1-k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b),$$
$$Q = \sin\mathrm{am}(u+a)\sin(u+b)-\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b,$$

sequitur e (3.)

$$P\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a+b) = Q,$$

quod suggerit formulam quaesitam:

$$4.\quad \sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b+\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a+b)-\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)$$
$$= k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\sin\mathrm{am}(u+a+b).$$

Quae est formula nova, maximi momenti per totam theoriam functionum ellipticarum.

Si rursus introducimus differentias quatuor quantitatum, formulam (4.) sic repraesentare licet:

$$\sin\mathrm{am}(w-x)\sin\mathrm{am}(y-z)+\sin\mathrm{am}(w-y)\sin\mathrm{am}(z-x)+\sin\mathrm{am}(w-z)\sin\mathrm{am}(x-y)$$
$$+k^2\sin\mathrm{am}(w-x)\sin\mathrm{am}(w-y)\sin\mathrm{am}(w-z)\sin\mathrm{am}(x-y)\sin\mathrm{am}(y-z)\sin\mathrm{am}(z-x)=0.$$

Similitudo formularum functiones trigonometricas et ellipticas spectantium maior adhuc existit, si loco sinuum introducimus tangentes. Ponendo enim $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $u\sqrt{-1}$, loco a, b, u, prodit e (4.), cum sit $\sin\mathrm{am}(u\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u,k')$, si loco k' restituimus modulum k, formula haec:

$$5.\quad \mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,a\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,b+\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,u\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+a+b)-\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+a)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+b)$$
$$= k'^2\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,a\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,b\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\,u\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+a)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+b)\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}(u+a+b).$$

Quae, posito $k=0$, in formulam trigonometricam abit

$$6.\quad \mathrm{tang}\,a\,\mathrm{tang}\,b+\mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}(u+a+b)-\mathrm{tang}(u+a)\,\mathrm{tang}(u+b)$$
$$= \mathrm{tang}\,a\,\mathrm{tang}\,b\,\mathrm{tang}\,u\,\mathrm{tang}(u+a)\,\mathrm{tang}(u+b)\,\mathrm{tang}(u+a+b).$$

In qua igitur formula, si loco tangentium ponimus tangentes amplitudinis nil mutabitur, nisi quod terminus ad dextram nanciscatur factorem k'^2.

E formula pro additione integralium secundae speciei:

$$E(u)+E(v)-E(u+v) = k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\sin\mathrm{am}(u+v)$$

habetur

$$E(a)+E(b)-E(a+b) = k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}(a+b),$$
$$E(u)+E(a+b)-E(u+a+b) = k^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(a+b)\sin\mathrm{am}(u+a+b)$$

quibus additis fit e (4.):

$$7.\quad E(a)+E(b)+E(u)-E(u+a+b) =$$
$$k^2 \sin\mathrm{am}(u+a)\sin\mathrm{am}(u+b)\sin\mathrm{am}(a+b)[1+k^2\sin\mathrm{am}\,a\sin\mathrm{am}\,b\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a+b)],$$

quae est formula respectu ipsorum a, b, u symmetrica. Cuiusmodi adnotari merentur, quia per additiones successivas ducimur ad formulas, quae cum natura sua symmetricae sint, tamen sub forma insymmetrica prodeant, quam non semper in promtu est quomodo ad symmetriam idonee revocemus.

Formula (4.), methodo assignata a me inventa, variis aliis modis demonstrari potest. Cl. *Richelot* hanc eius demonstrationem mihi communicavit.

Sit

$$\frac{w+x-y-z}{2} = \alpha,\qquad \frac{w-x+y-z}{2} = \beta,\qquad \frac{w-x-y+z}{2} = \gamma,$$

erit

$$w-x = \beta+\gamma,\qquad w-y = \gamma+\alpha,\qquad w-z = \alpha+\beta,$$
$$y-z = \beta-\gamma,\qquad z-x = \gamma-\alpha,\qquad x-y = \alpha-\beta,$$

unde cum generaliter sit:

$$\sin\mathrm{am}(u+v)\sin\mathrm{am}(u-v) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,u-\sin^2\mathrm{am}\,v}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

obtinemus:

$$\sin\mathrm{am}(w-x)\sin\mathrm{am}(y-z) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,\beta-\sin^2\mathrm{am}\,\gamma}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\beta\sin^2\mathrm{am}\,\gamma},$$
$$\sin\mathrm{am}(w-y)\sin\mathrm{am}(z-x) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,\gamma-\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\gamma\sin^2\mathrm{am}\,\alpha},$$
$$\sin\mathrm{am}(w-z)\sin\mathrm{am}(x-y) = \frac{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha-\sin^2\mathrm{am}\,\beta}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\,\beta}.$$

Theorema demonstrandum est, summam trium expressionum ad laevam aequare earum productum per $-k^2$ multiplicatum; sive posito br. c.

$$\sin^2\mathrm{am}\,\alpha = t,\qquad \sin^2\mathrm{am}\,\beta = t',\qquad \sin^2\mathrm{am}\,\gamma = t'',$$

haberi identice

$$\frac{t'-t''}{1-k^2t't''}+\frac{t''-t}{1-k^2t''t}+\frac{t-t'}{1-k^2tt'} = \frac{-k^2(t'-t'')(t''-t)(t-t')}{(1-k^2t't'')(1-k^2t''t)(1-k^2tt')},$$

quod facile patet, cum sit:

$$(t'-t'')t+(t''-t)t'+(t-t')t'' = 0,$$
$$(t'^2-t''^2)t+(t''^2-t^2)t'+(t^2-t'^2)t'' = (t'-t'')(t''-t)(t-t').$$

Observo adhuc, e (2.) posito $b=0$ fluere formulam:

$$8.\quad \int_0^u \sin\mathrm{am}(2u+a)\,du = \frac{1}{2k}\log\frac{1+k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a)}{1-k\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}(u+a)}.$$

Iam e formula (4.) profecti aliam formulam in theoria transcendentium $\Theta(u)$ seu $\Omega(u)$ fundamentalem et quae altioris indaginis est, adstruamus.

2.

E formula pro additione integralium ellipticorum secundae speciei fit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(2u+a+b) = k^2 \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(2u+a+b),$$
$$E(u)+E(u+a+b)-E(2u+a+b) = k^2 \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)\sin\operatorname{am}(2u+a+b),$$

quarum formularum altera de altera subducta, provenit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b) =$$
$$k^2 \sin\operatorname{am}(2u+a+b)[\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)-\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)],$$

sive e (4.):

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b) =$$
$$k^2 \sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b)].$$

Habetur porro e (4.):

$$[1-k^2\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b)\sin\operatorname{am}(u+a+b)] \times$$
$$[1+k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)]$$
$$= 1-k^2\sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am}(u+a+b),$$

unde prodit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= \frac{k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am}(u+a+b)]}{1+k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)},$$

sive cum sit

$$\sin\operatorname{am}(2u+a+b)[1-k^2\sin^2\operatorname{am} u \sin^2\operatorname{am}(u+a+b)]$$
$$= \frac{d[\sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)]}{du},$$

prodit:

$$E(u+a)+E(u+b)-E(u)-E(u+a+b)$$
$$= \frac{d\log[1+k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)]}{du}.$$

Unde integratione facta inde a $u=0$ usque ad $u=u$, positoque

$$\int_0 E(u) = \log\Omega(u),$$

si a logarithmis ad numeros ascendis, provenit formula nova fundamentalis:

$$9.\quad \frac{\Omega(u+a)\Omega(u+b)\Omega(a+b)}{\Omega(a)\Omega(b)\Omega(u)\Omega(u+a+b)} = 1+k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b).$$

Quam formulam etiam sub hac forma exhibere convenit:

$$10.\quad \frac{\Omega(u+a)}{\Omega a\,\Omega(u)}\cdot\frac{\Omega(u+b)}{\Omega b\,\Omega(u)}$$
$$= \frac{\Omega(u+a+b)}{\Omega u\,\Omega(a+b)}[1+k^2\sin\operatorname{am} a \sin\operatorname{am} b \sin\operatorname{am} u \sin\operatorname{am}(u+a+b)].$$

Quae, ponendo $b=-a$, cum sit $\Omega(-u)=\Omega(u)$, $\Omega(o)=1$, in formu-

lam abit, in Fundamentis traditam,

$$\frac{\Omega(u+a)\,\Omega(u-a)}{\Omega^2 a\,\Omega^2(u)} = 1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, u.$$

Facile etiam theorema de additione integralium ellipticorum tertiae speciei e (9.) deducitur. Habetur enim (Diar. *Crell.* T. IV. pg. 378):

$$\Pi(u, a) = uE(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

ideoque

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u+v, a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v+a)}{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v-a)}.$$

Iam si in (9.) scribimus u, v loco a, b, atque a ac deinde $-a$ loco u, obtinemus:

$$\frac{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v)}{\Omega u\,\Omega v\,\Omega(a)\,\Omega(u+v+a)} = 1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v+a),$$

$$\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v)}{\Omega u\,\Omega v\,\Omega a\,\Omega(u+v-a)} = 1 - k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v-a),$$

unde, altera formula per alteram divisa,

$$\frac{\Omega(u-a)\,\Omega(v-a)\,\Omega(u+v+a)}{\Omega(u+a)\,\Omega(v+a)\,\Omega(u+v-a)} = \frac{1 - k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v-a)}{1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v+a)},$$

ideoque

$$\Pi(u, a) + \Pi(v, a) - \Pi(u+v, a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{1 - k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v-a)}{1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\, v \sin\mathrm{am}\,(u+v+a)},$$

quae est formula nota.

Posito, uti l. c. pag. 383,

$$\Omega u = e^{-ruu} X(u),$$

ubi r est constans, cum sit

$$(u+a)^2 + (u+b)^2 + (a+b)^2 = a^2 + b^2 + u^2 + (u+a+b)^2,$$

habetur e (9.) etiam pro functionibus $X(u)$:

$$11. \quad \frac{X(u+a)\,X(u+b)\,X(a+b)}{Xa\,Xb\,Xu\,X(u+a+b)} = 1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, b \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\,(u+a+b).$$

Si functionem in *Fundamentis* adhibitam $\Theta(u)$ introducere placet, habetur pro $r = \frac{-E}{2K}$,

$$X(u) = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = e^{\frac{-Euu}{2K}}\,\Omega u,$$

unde e (11.) prodit:

$$12. \quad \frac{\Theta(o)\,\Theta(u+a)\,\Theta(u+b)\,\Theta(a+b)}{\Theta a\,\Theta b\,\Theta u\,\Theta(u+a+b)} = 1 + k^2 \sin\mathrm{am}\, a \sin\mathrm{am}\, b \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}\,(u+a+b).$$

Posito

$$\Omega'(u) = \frac{d\,\Omega u}{du}, \qquad \Theta'(u) = \frac{d\,\Theta(u)}{du},$$

habetur

$$\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} = \frac{\Omega'(u)}{\Omega(u)} - \frac{E}{K}.u = E(u) - \frac{E}{K}.u$$

unde

$$E(a)+E(b)+E(u)-E(u+a+b) = \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}+\frac{\Theta'b}{\Theta b}+\frac{\Theta'u}{\Theta u}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)}.$$

Porro si, uti in *Fundamentis*, ponimus

$$H(u) = \sqrt{k}\sin\operatorname{am}(u)\,\Omega(u),$$

erit

$$k^2\sin\operatorname{am}(a+b)\sin\operatorname{am}(u+a)\sin\operatorname{am}(u+b) = \sqrt{k}.\frac{H(a+b)H(u+a)H(u+b)}{\Theta(a+b)\Theta(u+a)\Theta(u+b)},$$

unde e (7.), (12.) prodit:

$$\frac{\Theta'a}{\Theta a}+\frac{\Theta'b}{\Theta b}+\frac{\Theta'u}{\Theta u}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)} = \sqrt{k}.\frac{\Theta(o)H(a+b)H(u+a)H(u+b)}{\Theta a\,\Theta b\,\Theta u\,\Theta(u+a+b)},$$

sive cum sit (*Fund.* pg. 184):

$$\sqrt{k}.\Theta(o) = H'(o),$$

prodit formula:

$$13.\qquad \frac{\Theta'a}{\Theta a}+\frac{\Theta'b}{\Theta b}+\frac{\Theta'u}{\Theta u}-\frac{\Theta'(u+a+b)}{\Theta(u+a+b)} = \frac{H'(o)H(a+b)H(u+a)H(u+b)}{\Theta a\,\Theta b\,\Theta u\,\Theta(u+a+b)},$$

quam data occasione adnotare volui.

Dedi olim sine demonstratione expressiones algebraicas generales radicum aequationum n^{ti} gradus, quae transformationem functionum ellipticarum concernunt. Quae formulae, quae spectari debebant ut id, quod hactenus in theoria functionum ellipticarum maxime reconditum est, per principium novum ac latissime patens a me inventae sunt; post ope formulae memorabilis (10.) eas demonstratione maxime eleganti atque elementari comprobare contigit. Quod suo tempore in lucem proferemus.

Regiomonti 21. Sept. 1835.

14.

De evolutione expressionis $(l+2l'\cos\Phi+2l''\cos\Phi')^{-n}$ in seriem infinitam secundum cosinus multiplorum utriusque anguli Φ, Φ' procedentem.

(Auct. Dr. *C. G. J. Jacobi*, prof. math. Regiom.)

1.

Egregiam olim in *Exercitiis Calculi Integralis*, repetitam deinde in Opere de *Functionibus Ellipticis*, conscripsit ill. *Legendre* disquisitionem de evolutione expressionis

$$(1-2a\cos\Phi+a^2)^{-n}$$

in seriem infinitam, secundum cosinus multiplorum ipsius Φ procedentem. Facile perspicis, principia disquisitionis extendi posse ad evolutionem dignitatum expressionis magis complicatae, ex. gr. ad evolvendam expressionem

$$(a+b\cos\Phi+c\sin\Phi+d\cos^2\Phi+e\cos\Phi\sin\Phi+f\sin^2\Phi)^{-n};$$

quam quaestionem valde utilem sollerti nuper discipulo commisi, qui mox ea perfunctus erit. Quamvis vero in his quoque rebus gravia restent, in quibus tractandis a novis principiis proficisci debes, hoc loco ad alius generis disquisitionem methodos viri illustris applicabo, videlicet ad evolutionem dignitatum expressionis *duos* angulcs involventis, secundum utriusque anguli multipla instituendam. Expressionem autem, ut in re minus nota, simplicissimam elegi hanc

$$(l+2l'\cos\Phi+2l''\cos\Phi')^{-n},$$

in cuius evolutione hoc loco acquiescam; theoremate quaedam de expressionibus complicatioribus a me inventa in alia nuper commentatione indicavi.

Evolutionum secundum multipla unius anguli procedentium coëfficientes omnes ad numerum earum finitum revocari possunt. In evolutionibus secundum multipla duorum angulorum procedentibus, cum coëfficientes sint numero dupliciter infinitae, dubium oriri potest, an una pluresve series coëfficientium simpliciter infinitae cognitae esse debeant, e quibus reliquae determinentur, sive et hoc casu numerus coëfficientium finitus re-

liquis omnibus determinandis sufficiat. Nam si evolutionem secundum multipla alterius anguli ordinas, et per methodum vulgarem relationem inter coëfficientes quaeris, videbis, coëfficientes evolutionis propositae formare series *dupliciter recurrentes*, quarum termini assignari omnes non possunt, nisi eorum infiniti numero dati sint. Sed cum evolutionem secundum alterum quoque angulum ordinare liceat, alteram eruis relationem ab antecedente diversam, quo intelligitur, *coëfficientes evolutionis propositae formare series dupliciter recurrentes secundum duas scalas inter se diversas.* Generaliter quidem eiusmodi series dupliciter recurrentes formari non possunt, quae duabus simul scalis quibuscunque satisfaciant. Est enim problema plus quam determinatum, sive unusquisque terminus ad antecedentia pluribus modis revocari poterit, unde fieri potest, ut ex aequationibus inter coëfficientes, quas duae illae scalae suppeditant, aliae aliis contradicant. Si vero, ut in quaestione nostra, eiusmodi series re verâ dantur, aequationes, quas duae scalae suppeditant, cum sibi ipsae contradicere nequeant, aliae alns contineri debent, sive complures ex earum numero erunt abundantes. Videbimus igitur, per alteram scalam coëfficientes numero dupliciter infinito ad series earum unam pluresve simpliciter infinitas revocari; aequationes deinde, quas altera scala suppeditat, pars ulteriori reductioni adhiberi poterit, pars abundabit. Qua reductione ulteriori, facile tibi persuadebis, quaecunque sit expressio cosinuum vel sinuum duorum angulorum rationalis finita, cuius potestas secundum multipla utriusque anguli evolvenda proponatur, perveniri ad coëfficientes numero finitas, ad quas reliquae omnes revocari possint.

In casu simplici, quem hic consideramus habentur duae relationum scalae inter quinque coëfficientes

$$p_{i,i'},\quad p_{i-1,i'},\quad p_{i+1,i'},\quad p_{i,i'-1},\quad p_{i,i'+1},$$

e quibus unam eliminando, quinque alias deducere licet, quarum binae reliquarum locum tenent. Alterius relationis ope coëfficientes omnes ad duas earum series simpliciter infinitas $p_{i,0}$, $p_{i,1}$ revocari possunt; quarum deinde termini omnes per alteram relationum scalam ulterius reducuntur ad quatuor, ex. gr. ad hos,

$$p_{0,0},\quad p_{0,1},\quad p_{1,0},\quad p_{1,1}.$$

Praeterea aequationes ex altera scala proveniunt numero dupliciter infinito abundantes. Quae quomodo reliquae contineantur, accurata ratiocinatione demonstravi.

Numerus coëfficientium, ad quas reliquae omnes revocari possunt, constare nequit, nisi antea constet, quaenam aequationum, quae inter coëfficientes evolutionis locum habent, abundent seu ex reliquis sponte fluant. Nam unaquaque aequatione, quae reliquis non continetur, ille numerus unitate minuitur. Sive autem ad calculum coëfficientium illis reductionibus uti placet, sive non, id semper gravissimi momenti est, ut bene scias, ad quemnam earum numerum omnes revocare liceat. Distinctio ista in aequationes ad reductionem coëfficientium necessarias et in aequationes abundantes seu superfluas in casu nostro simplici sine magna difficultate transigebatur; sed in casibus magis complicatis fieri vix potest propter calculos inextricabiles, ut generaliter ex ipsis aequationibus cognoscatur, quaenam reliquis contineantur. Qua de re ipsas examinavi aequationes duas differentiales, e quibus relationum scalae petuntur; quo facto regulam generalem inveni, qua aequationes abundantes a necessariis distinguantur, quamvis complicatae illae sint expressiones, quarum potestas evolvenda proponitur. Se iunctis igitur aequationibus abundantibus, in reductionibus per reliquas efficiendis non metuendum est, ut in aequationes incidas identicas, sed regulae illius beneficio tuto et sine omni ambiguitate omnibus casibus numerum minimum coëfficientium assignare vales, quibus reliquae omnes determinantur.

Ex aequationibus, quae e duabus relationum scalis sequuntur, aliae innumerae formari possunt, quarum eas prae caeteris consideravi, quae alterum indicem eundem habent; sive ordinata evolutione secundum cosinus multiplorum alterius anguli, qui in functiones alterius anguli multiplicantur, secundum cosinus multiplorum eius procedentes, relationes inter coëfficientes harum functionum unius anguli investigavi. Relationum scala, quae invenitur, est inter quinque terminos se proxime insequentes, qua omnes, uti fieri debet, ad quatuor revocantur. E qua deinde scala aequationes differentiales deduxi, quibus functiones illae satisfacere debent; quae tertii ordinis inveniuntur. Ubi vero aequationes illae differentiales directa via de aequationibus duabus differentialibus deducuntur, e quibus duae relationum scalae fluunt, aequationes differentiales assurgunt tantum ad ordinem secundum. Sed accidit, ut relationes inter coëfficientes functionum illarum unius anguli ex aequationibus differentialibus secundi ordinis magis complicatae evadunt, quam quae ex aequationibus differentialibus tertii ordinis prodibant.

Sub finem adstruxi formulas, quibus coëfficientes evolutionis expressionis $l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')^{-(n+1)}$, quas $q_{i,i'}$ dicemus, per ipsas $p_{i,i'}$ sive per coëfficientes evolutionis ipsius $(l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')^{-n}$ exprimantur. Quod fieri posse, facile patet. Harum enim expressiones per illas facillime inveniuntur, sola multiplicatione per $l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi'$ facta. Unde quatuor coëfficientes $p_{i,i'}$ si per ipsas $q_{i,i'}$ exhibemus, quae et ipsae ad quatuor revocari possunt, singulas $q_{i,i'}$ ex ipsis $p_{i,i'}$ per resolutionem quatuor aequationum linearium obtines. Qua in re circumspectione quadam agendum est, ne in calculos prolixiores incidas. Per considerationem valde facilem et directam inveni quatuor aequationes lineares simplicissimas, quibus $p_{i,i'}$, $p_{i-1,i'}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i-1,i'-1}$ per $q_{i,i'}$, $q_{i-1,i'}$, $q_{i,i'-1}$, $q_{i-1,i'-1}$ exprimuntur. Quae formam curiosam habent:

$$\begin{aligned} aw+bx+cy+dz &= t, \\ bw+ax+dy+cz &= t', \\ cw+dx+ay+bz &= t', \\ dw+cx+by+az &= t'', \end{aligned}$$

in quibus adeo $d=0$; quod aequationum genus per solas additiones et subtractiones eleganter resolvitur.

Quoties problema a resolutione aequationum linearium pendet, hodie seorsim examinare solemus casum, quo resolutio fit illusoria, sive quo denominator valoribus incognitarum algebraicis communis evanescit. Qui casus in hac quaestione obvenit, quoties valor absolutus ipsius l aequat summam valorum absolutorum ipsarum $2l'$, $2l''$. Quo casu memorabili ducimur ad novam relationem inter quatuor coëfficientes, ad quas reliquae omnes revocari possunt. Unde eo casu coëfficientes omnes revocari possunt ad tres. Iam ipsas formulas apponamus.

2.

Propositum sit, expressionem

$$\Delta^{-n} = [l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi']^{-n}$$

in seriem infinitam evolvere, secundum cosinus multiplorum utriusque anguli φ, φ' procedentem; quam seriem repraesentemus per formulam:

$$\Delta^{-n} = \Sigma p_{i,i'} e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

designante e basin logarithmorum naturalium, atque indicibus i, i' tributis valoribus omnibus a $-\infty$ usque ad $+\infty$. Cum in evolutione proposita tantum *cosinus* angulorum inveniantur, fieri debet

$$p_{i,i'} = p_{i,-i'} = p_{-i,i'} = p_{-i,-i'},$$

unde si ipsis i, i' valores tribuuntur a 1 usque ad ∞, seriem propositam etiam hoc modo repraesentare possumus:

$$\Delta^{-n} = p_{0,0} + 2\Sigma p_{i,0}\cos i\Phi + 2\Sigma p_{0,i'}\cos i'\Phi' + 4\Sigma p_{i,i'}\cos i\Phi\cos i'\Phi'.$$

Coëfficientium $p_{i,i'}$ habetur expressio per integralia definita,

$$1.\quad p_{i,i'} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\cos i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{[l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi']^n}.$$

Quae integralia demonstravi nuper transformari posse in hae:

$$2.\quad p_{i,i'} = \frac{(-2)^{i+i'}}{\pi^2}\cdot\frac{n.n+1.n+2\ldots n+i+i'-1}{1.3\ldots 2i-1.1.3\ldots 2i'-1}\cdot l'^i l''^{i'}\int_0^\pi\int_0^\pi\frac{\sin^{2i}\varphi\sin^{2i'}\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{[l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi']^{n+i+i'}}.$$

Relationes inter coëfficientes evolutionis $p_{i,i'}$ nanciscimur hoc modo.

Statuamus $U=\Delta^{-n}$, erit

$$3.\quad \begin{cases} \Delta.\dfrac{dU}{d\varphi}+n\dfrac{d\Delta}{d\varphi}.U = \dfrac{d.\Delta U}{d\varphi}+(n-1)\dfrac{d\Delta}{d\varphi}.U = 0,\\ \Delta.\dfrac{dU}{d\varphi'}+n\dfrac{d\Delta}{d\varphi'}.U = \dfrac{d.\Delta U}{d\varphi'}+(n-1)\dfrac{d\Delta}{d\varphi}.U = 0. \end{cases}$$

In quibus aequationibus substituamus expressiones

$$U = \Sigma p_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},\qquad \Delta = l+l'(e^{\varphi\sqrt{-1}}+e^{-\varphi\sqrt{-1}})+l''(e^{\varphi'\sqrt{-1}}+e^{-\varphi'\sqrt{-1}}),$$

$$\frac{d\Delta}{d\varphi} = \sqrt{-1}\,l'(e^{\varphi\sqrt{-1}}-e^{-\varphi\sqrt{-1}}),\qquad \frac{d\Delta}{d\varphi'} = \sqrt{-1}\,l''(e^{\varphi'\sqrt{-1}}-e^{-\varphi'\sqrt{-1}});$$

quo facto si statuimus prodire:

$$4.\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{d.\Delta U}{d\varphi}+(n-1)\dfrac{d\Delta}{d\varphi}.U = \sqrt{-1}\,\Sigma g_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},\\ 0 = \dfrac{d.\Delta U}{d\varphi'}+(n-1)\dfrac{d\Delta}{d\varphi'}.U = \sqrt{-1}\,\Sigma h_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}}, \end{cases}$$

invenitur:

$$5.\quad \begin{cases} 0 = g_{i,i'} = i[lp_{i,i'}+l'(p_{i-1,i'}+p_{i+1,i'})+l''(p_{i,i'-1}+p_{i,i'+1})]\\ \qquad\qquad +(n-1)l'[p_{i-1,i'}-p_{i+1,i'}],\\ 0 = h_{i,i'} = i'[lp_{i,i'}+l'(p_{i-1,i'}+p_{i+1,i'})+l''(p_{i,i'-1}+p_{i,i'+1})]\\ \qquad\qquad +(n-1)l''[p_{i,i'-1}-p_{i,i'+1}], \end{cases}$$

sive

$$6.\quad \begin{cases} 0=g_{i,i'}= i[lp_{i,i'}+l''(p_{i,i'-1}+p_{i,i'+1})]+l'[(i+n-1)p_{i-1,i'}+(i-n+1)p_{i+1,i'}],\\ 0=h_{i,i'}=i'[lp_{i,i'}+l'(p_{i-1,i'}+p_{i+1,i'})]+l''[(i'+n-1)p_{i,i'-1}+(i'-n+1)p_{i,i'+1}]. \end{cases}$$

E (5.) facile sequitur:

$$7.\quad 0=f_{i,i'}=\frac{i'g_{i,i'}-ih_{i,i'}}{n-1} = i'l'(p_{i-1,i'}-p_{i+1,i'})-il''(p_{i,i'-1}-p_{i,i'+1}),$$

de qua aequatione exponentem n et constantem l prorsus abiisse videmus. Porro sequitur e (6.), (7.):

$$8.\quad\begin{cases} 0 = f_{i,i'}+h_{i,i'} = i'[lp_{i,i'}+2l'p_{i-1,i'}]+l''[(i'-i+n-1)p_{i,i'-1}+(i'+i-n+1)p_{i,i'+1}], \\ 0 = -f_{i,i'}+h_{i,i'} = i'[lp_{i,i'}+2l'p_{i+1,i'}]+l''[(i'+i+n-1)p_{i,i'-1}+(i'-i-n+1)p_{i,i'+1}], \\ 0 = -f_{i,i'}+g_{i,i'} = i[lp_{i,i'}+2l''p_{i,i'-1}]+l'[(i-i'+n-1)p_{i-1,i'}+(i+i'-n+1)p_{i+1,i'}], \\ 0 = f_{i,i'}+g_{i,i'} = i[lp_{i,i'}+2l''p_{i,i'+1}]+l'[(i+i'+n-1)p_{i-1,i'}+(i-i'-n+1)p_{i+1,i'}]. \end{cases}$$

Duae aequationes (5.) sive (6.), in quas primum incidimus, sunt inter quinque terminos $p_{i,i'}$, $p_{i-1,i'}$, $p_{i+1,i'}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i,i'+1}$; quarum unam si eliminamus, quod quinque modis fieri potest, pervenimus ad quinque aequationes (7.), (8.), quae tantum inter quatuor terminos sunt. Septem aequationes (6.), (7.), (8.) omnes e duabus quibuslibet ex earum numero proveniunt. Si vero datum supponis, haberi $p_{i,i'}=p_{-i,i'}$, aut $p_{i,i'}=p_{i,-i'}$, sufficit unica aequatio. Nam si $p_{i,i'}=p_{-i,i'}$, mutato i in $-i$ aequationum (8.) duae priores; si $p_{i,i'}=p_{i,i'-1}$, mutato i' in $-i'$ aequationum (8.) duae posteriores in se invicem abeunt.

Formulae (7.), (8.) exceptionem pati videntur, si $n=1$; eo enim casu duae aequationes (5.) seu (6.) in eandem abeunt, neque fieri potest, ut reliquae ex iis deriventur. Sed observo, aequationem (7.) etiam directe derivari posse ex aequatione differentiali, quae generaliter valet, quaecunque sit U ipsius Δ functio:

$$9.\qquad \frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'}-\frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}=0,$$

quippe quae casu nostro, substitutio ipsarum Δ, U expressionibus, facile suppeditat:

$$10.\qquad \frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'}-\frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}=-\Sigma f_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}}=0,$$

unde etiam pro $n=1$ habetur $f_{i,i'}=0$, quae est aequatio (7.). Cuius ope deinde reliquae aequationes (8.) demonstrantur. Casu igitur $n=1$, habentur e (6.), (7.) inter coëfficientes evolutionis ipsius

$$\frac{1}{l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi'}=\Sigma p_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

aequationes

$$11.\qquad \begin{cases} 0 = lp_{i,i'}+l'(p_{i-1,i'}+p_{i+1,i'})+l''(p_{i,i'-1}+p_{i,i'+1}), \\ 0 = \qquad i'l'(p_{i-1,i'}-p_{i+1,i'})-il''(p_{i,i'-1}-p_{i,i'+1}), \end{cases}$$

quarum prior etiam de aequatione $\Delta U=1$ derivari potest, quae simul eius exceptionem indicat, quae pro $i=i'=0$ locum habet. Quo casu aequationis illius expressio ad dextram non evanescit, sed unitati aequalis fit, sive habetur:

$$12.\qquad 1=lp_{0,0}+2l'p_{1,0}+2l''p_{0,1}.$$

Videamus iam, quinam sit numerus minimus coëfficientium $p_{i,i'}$, ad quem per relationes inventas reliquae omnes revocari possint.

3.

Ex altera aequationum (6.), ex. gr. e prima $g_{i,i'}=0$ patet, coëfficientes omnes $p_{i,i'}$ lineariter exprimi posse per $p_{i,0}$ et $p_{i,1}$; quippe quae formula generaliter docet, quomodo per coëfficientes $p_{i,i'-1}$, $p_{i,i'}$ coëfficientes $p_{i,i'+1}$ sive etiam per $p_{i,i'+1}$, $p_{i,i'}$ ipsae $p_{i,i'-1}$ lineariter exprimantur. Ut vero coëfficientes $p_{i,0}$, $p_{i,1}$ ulterius reducamus, advocanda est altera aequationum (6.) $h_{i,i'}=0$. In qua si primum ponimus $i'=0$, prodit $p_{i,-1}=p_{i,1}$, unde si idem facimus in aequatione $g_{i,i'}=0$, prodit:

$$13.\qquad 0=i(lp_{i,0}+2l''p_{i,1})+l'((i+n-1)p_{i-1,0}+(i-n+1)p_{i+1,0}),$$

cuius formulae ope coëfficientes $p_{i,1}$ iam ad coëfficientes $p_{i,0}$ revocantur. Porro in aequatione $h_{i,i'}=0$ statuamus $i'=1$: ex aequationibus $g_{i,1}=0$, $h_{i,1}=0$ derivantur quatuor aequationes (8.), in quibus $i'=1$ ponatur. Quarum tertia suppeditat:

$$14.\qquad 0=i[lp_{i,1}+2l''p_{i,0}]+l'((i+n-2)p_{i-1,1}+(i-n+2)p_{i+1,1}),$$

cuius aequationis ope vice versa coëfficientes $p_{i,0}$ per ipsas $p_{i,1}$ exhibentur. Utraque (13.), (14.) iunctim adhibita, facile e quatuor coëfficientibus $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ reliquae $p_{i,0}$, $p_{i,1}$ determinantur, in quibus $i>1$. Posito enim in (13.), (14.) $i=1$, habentur $p_{2,0}$, $p_{2,1}$; posito deinde $i=2$, habentur $p_{3,0}$, $p_{3,1}$ et ita porro. Nec non ex aequationibus appositis facile demonstratur, quod natura evolutionis propositae poscit, haberi generaliter:

$$p_{i,i'}=p_{-i,i'}=p_{i,-i'}=p_{-i,-i'}.$$

Unde quaestionem restringere licet ad eum casum, quo i, i' valores positivos habent.

Prorsus eadem ratione ope aequationum $g_{i,i'}=0$, $h_{0,i'}=0$, $h_{1,i'}=0$ coëfficientes $p_{i,i'}$ omnes ad quatuor reducuntur. Nam e $g_{i,i'}=0$ omnes ad $p_{0,i'}$, $p_{1,i'}$ revocantur; porro e $g_{0,i'}=0$ fit $p_{-1,i'}=p_{1,i'}$, unde ex aequatione $h_{0,i'}=0$ revocatur $p_{1,i'}$ ad $p_{0,i'}$; denique si e $g_{1,i'}=0$, $h_{1,i'}=0$, deducimus primam (8.), etiam $p_{0,i'}$ ad $p_{1,i'}$ revocari potest. Utraque aequatione

$$0=i'(lp_{0,i'}+2l'p_{1,i'})+l''((i'+n-1)p_{0,i'-1}+(i'-n+1)p_{0,i'+1}),$$
$$0=i'(lp_{1,i'}+2l'p_{0,i'})+l''((i'+n-2)p_{1,i'-1}+(i'-n+2)p_{1,i'+1}),$$

iunctim adhibita, coëfficientes $p_{0,i'}$, $p_{1,i'}$, ad quas reliquae omnes $p_{i,i'}$, revocatae sunt, rursus ad quatuor $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$, sicuti supra, revocantur.

4.

Aequationibus $g_{i,i'}=0$, $h_{i,0}=0$, $h_{i,1}=0$, vidimus coëfficientes $p_{i,i'}$ omnes per quatuor determinari; sed ut certum sit, hunc esse numerum minimum coëfficientium, ad quas reliquae revocari possint, insuper demonstrandum est, aequationes reliquas $h_{i,i'}=0$ ex illis sponte fluere. Nam si, ope aequationum illarum ipsis $p_{i,i'}$ expressis per quatuor ex earum numero, vel una aequationum $h_{i,i'}=0$, in quibus $i'>1$, sive $i'<0$, non evaderet *identica*, haberetur nova inter quatuor illas coëfficientes relatio, neque is foret minimus coëfficientium numerus, per quas reliquae determinentur.

In finem propositum demonstrabo, si aequationum (6.) altera valeat pro omnibus ipsius i' valoribus, altera vero loco i' posito et i' et $i'-1$, eandem valere, loco i' posito $i'+1$. Quoties vero aequationes (6.) valent, loco i' posito et i' et $i'-1$, pro iisdem ipsius i' valoribus valebunt aequationes (7.), (8.); et vice versa, si demonstratum erit, unam aliquam aequationum (7.), (8.) valere loco i' posito $i'+1$, cum altera aequationum (6.) pro omnibus ipsius i' valoribus valeat, etiam altera aequationum (6.) valebit, si loco i' ponitur $i'+1$.

Proficiscimur ab aequationibus, quae e (7.), (8.) proveniunt:

$$a)\qquad 0 = -f_{i-1,i'}+h_{i-1,i'}$$
$$= i'[l p_{i-1,i'}+2l' p_{i,i'}]+l''[(i'+i+n-2)p_{i-1,i'-1}+(i'-i-n+2)p_{i-1,i'+1}],$$
$$b)\qquad 0 = f_{i,i'-1}+g_{i,i'-1}$$
$$= i\,[l p_{i,i'-1}+2l'' p_{i,i'}]+l'[(i+i'+n-2)p_{i-1,i'-1}+(i-i'-n+2)p_{i+1,i'-1}],$$
$$c)\qquad 0 = f_{i,i'}$$
$$= i' l[p_{i-1,i'}-p_{i+1,i'}]-i l''(p_{i,i'-1}-p_{i,i'+1}),$$
$$d)\qquad 0 = f_{i+1,i'}+h_{i+1,i'}$$
$$= i'[l p_{i+1,i'}+2l' p_{i,i'}]+l''[(i'-i+n-2)p_{i+1,i'-1}+(i'+i-n+2)p_{i+1,i'+1}].$$

E a), b) sequitur:

$$0 = 2(i'l'^2-il''^2)p_{i,i'}+i'll'p_{i-1,i'}-ill''p_{i,i'-1}$$
$$+l'l''[(i'-i-n+2)p_{i-1,i'+1}-(i-i'-n+2)p_{i+1,i'-1}],$$

quae formula e c) in hanc mutari potest

$$0 = 2(i'l'^2-il''^2)p_{i,i'}+i'll'p_{i+1,i'}-ill''p_{i,i'+1}$$
$$+l'l''[(i'-i-n+2)p_{i-1,i'+1}-(i-i'-n+2)p_{i+1,i'-1}],$$

quae tandem e d) fit:

$$0 = -2il''^2p_{i,i'}-ill''p_{i,i'+1}$$
$$+l'l''[(i'-i-n+2)p_{i-1,i'+1}-(i'+i-n+2)p_{i+1,i'+1}],$$

sive divisione per l'' facta,

$$e)\qquad 0=f_{i,i'+1}-g_{i,i'+1}$$
$$=-i(lp_{i,i'+1}+2l''p_{i,i'})+l'[(i'-i-n+2)p_{i-1,i'+1}-(i'+i-n+2)p_{i+1,i'+1}].$$

Videmus igitur, ex aequationibus $a)$, $b)$, $c)$, $d)$ sequi aequationem $e)$, unde si pro omnibus ipsius i valoribus habetur $g_{i,i'-1}=0$, $g_{i,i'}=0$, $g_{i,i'+1}=0$, $h_{i,i'-1}=0$, $h_{i,i'}=0$, ideoque e (7.), $f_{i,i'-1}=0$, $f_{i,i'}=0$, erit etiam $f_{i,i'+1}=0$ sive $h_{i,i'+1}=0$, q. d. e. Et cum etiam ex aequationibus $a)$, $c)$, $d)$, $e)$ sequatur $b)$, eodem modo videmus, ex aequationibus $g_{i,i'-1}=0$, $g_{i,i'}=0$, $g_{i,i'+1}=0$, $h_{i,i'+1}=0$, $h_{i,i'}=0$ sequi $h_{i,i'-1}=0$. Unde si valent aequationes $g_{i,i'}=0$ pro omnibus ipsorum i, i' valoribus, porro habentur pro omnibus ipsius i valoribus aequationes $h_{i,0}=0$, $h_{i,1}=0$, generaliter etiam pro omnibus ipsorum i, i' valoribus (et positivis et negativis) valebunt aequationes $h_{i,i'}=0$. Hinc cum ope aequationum $g_{i,i'}=0$, $h_{i,0}=0$, $h_{i,1}=0$ coëfficientes $p_{i,i'}$ omnes ad quatuor ex earum numero reducantur, patet, eum numerum per reliquas aequationes $h_{i,i'}=0$ ulterius reduci non posse, quippe quae illis ex illis sponte fluunt. Unde etiam, si per aequationes $g_{i,i'}=0$, $h_{i,0}=0$, $h_{i,1}=0$ coëfficientes omnes per quatuor exprimimus, earumque valores ita expressos in aequationibus $h_{i,i'}=0$ substituimus, in quibus $i'>1$, sive $i'<0$, aequationes illae identicae evadere debent.

5.

Ut ex ipsis $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ deducantur valores ipsarum $p_{i,i'}$, quae indices proxime maiores habent, adhiberi possunt aequationes, quae e (8.) fluunt:

$$15.\quad\begin{cases}(n-2)l''p_{0,2}= & lp_{0,1}+2l'p_{1,1}+nl''p_{0,0},\\(n-2)l'p_{2,0}= & lp_{1,0}+2l''p_{1,1}+nl'p_{0,0},\\(n-3)l''p_{1,2}= & lp_{1,1}+2l'p_{0,1}+(n-1)l''p_{1,0},\\(n-3)l'p_{2,1}= & lp_{1,1}+2l''p_{1,0}+(n-1)l'p_{0,1},\\(n-3)l''p_{0,3}= & 2lp_{0,2}+4l'p_{1,2}+(n+1)l''p_{0,1},\\(n-3)l'p_{3,0}= & 2lp_{2,0}+4l''p_{2,1}+(n+1)l'p_{1,0},\\(u-4)l''p_{2,2}= & lp_{2,1}+2l'p_{1,1}+(n-2)l''p_{2,0},\\(n-4)l'p_{2,2}= & lp_{1,2}+2l''p_{1,1}+(n-2)l'p_{0,2},\\\text{etc.} & \text{etc.}\end{cases}$$

Si in duabus aequationibus postremis substituimus ipsarum $p_{0,2}$, $p_{2,0}$, $p_{1,2}$, $p_{2,1}$ valores per $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ expressi, quales per aequationes antecedentes exhibentur, duo ipsius $p_{2,2}$ valores, qui inde prodeunt, erunt identici; unde earum aequationum altera abundat.

Quatuor coëfficientes, e quibus reliquae determinantur, generalius statui possunt

$p_{i,i'}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i-1,i'}$, $p_{i-1,i'-1}$ sive $p_{i,i'}$, $p_{i,i'+1}$, $p_{i+1,i'}$, $p_{i+1,i'}$

sive quatuor, quae alterum indicem eundem habent, ex. gr.

$p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{0,2}$, $p_{0,3}$ sive $p_{0,0}$, $p_{1,0}$, $p_{2,0}$, $p_{3,0}$,

sive generalius quatuor quaecunque $p_{\alpha,\alpha'}$, $p_{\beta,\beta'}$, $p_{\gamma,\gamma'}$, $p_{\delta,\delta'}$, inter quas nulla habetur relatio. His enim per $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ expressis, hae vice versa per illas exprimi possunt. Quibus expressionibus substitutis in valore coëfficientis cuiuslibet $p_{i,i'}$, per $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$ exhibito, habebis $p_{i,i'}$ per $p_{\alpha,\alpha'}$, $p_{\beta,\beta'}$, $p_{\gamma,\gamma'}$, $p_{\delta,\delta'}$ expressum

At quatuor illae coëfficientes, e quibus reliquae determinentur, non eligi possunt e numero coëfficientium

$p_{i,i}$, $p_{i-1,i'}$, $p_{i+1,i'}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i,i'+1}$,

inter quas duas aequationes (6.) invenimus. Nam inter quaternas ex earum numero una habetur relatio, neque ex iis ullam, aliam determinare licet nisi quintam.

Casu speciali, quo n numerus integer positivus aut negativus alia insuper excludere debes coëfficientium systemata. Ex. gr., si $n=2$ aut $n=3$, excludere debes systema coëfficientium $p_{0,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,0}$, $p_{1,1}$, quippe inter quas e (15.) si $n=2$, duae habentur relationes:

$$0 = lp_{0,1}+2l'p_{1,1}+2l''p_{0,0}, \qquad 0 = lp_{1,0}+2l''p_{1,1}+2l'p_{0,0},$$

si $n=3$, una relatio:

$$0 = lp_{1,1}+2l'p_{0,1}+2l''p_{1,0}.$$

Innumera alia systemata *trium* coëfficientium, inter quas relatio linearis habetur, eo casu obtines, ponendo in (8.) $i'=i+n-1$, unde fit:

$$16. \quad 0 = lp_{i,i+n-1}+2l'p_{i+1,i+n-1}+2l''p_{i,i+n-2}.$$

Neque igitur, si n numerus integer positivus aut negativus, e quatuor coëfficientibus, per quas reliquae exprimantur, esse possunt tres, quae in (16.) inveniuntur.

Statuamus, coëfficientes omnes $p_{i,i'}$ per quatuor ex earum numero p, p', p'', p''' expressas esse ope aequationum:

$$p_{i,i'} = H_{i,i'}.p+H'_{i,i'}.p'+H''_{i,i'}.p''+H'''_{i,i'}.p''',$$

aequationes omnes (6.) et quae ex iis deduci possunt (7.), (8.), substitutis illis ipsarum $p_{i,i'}$ valoribus, identicae fieri debent, sive termini in p, p', p'', p''' ducti seorsim evanescere debent. Hinc sequitur, aequationes (6.), nec non (7.), (8.) adhuc valere, si in iis loco p scribatur aut H aut H'

aut H'' aut H'''. Habentur igitur e (6.) inter ipsas $H_{i,i'}$ aequationes:

$$17. \begin{cases} 0 = i\,[l\,H_{i,i'} + l''(H_{i,i'-1}+H_{i,i'+1})] + l'\,[(i+n-1)H_{i-1,i'} + (i-n+1)H_{i+1,i'}], \\ 0 = i'[l\,H_{i,i'} + l'(H_{i-1,i'}+H_{i+1,i'})] + l''[(i'+n-1)H_{i,i'-1} + (i'-n+1)H_{i,i'+1}]. \end{cases}$$

Quarum aequationum ope quantitates omnes $H_{i,i'}$ per formulas plane easdem atque $p_{i,i'}$ e quatuor ex earum numero determinantur. Et aequationes plane easdem habemus inter quantitates $H'_{i,i'}$, $H''_{i,i'}$, $H'''_{i,i'}$. Si statuimus

$$p = p_{0,0}, \quad p' = p_{1,0}, \quad p'' = p_{0,1}, \quad p''' = p_{1,1},$$

erit:

$$\begin{aligned} H_{0,0} &= 1, & H'_{0,0} &= H''_{0,0} = H'''_{0,0} = 0, \\ H'_{1,0} &= 1, & H_{1,0} &= H''_{1,0} = H'''_{1,0} = 0, \\ H''_{0,1} &= 1, & H_{0,1} &= H'_{0,1} = H'''_{0,1} = 0, \\ H'''_{1,1} &= 1, & H_{1,1} &= H'_{1,1} = H''_{1,1} = 0. \end{aligned}$$

Qui valores omnibus $H_{i,i'}$, $H'_{i,i'}$, $H''_{i,i'}$, $H'''_{i,i'}$ determinandis sufficiunt.

6.

Vidimus antecedentibus, relationes omnes, quae inter coëfficientes evolutionis propositae locum habent, et quae ex aequationibus differentialibus (3.) proveniunt, distribui posse in duas classes, quarum altera eas continet relationes, quae ad reductionem coëfficientium ad minimum earum numerum necessariae sunt, et quarum nulla reliquis continetur; altera classis continet relationes abundantes seu quae ex illis deduci possunt. Cum vero pro expressionibus ipsius Δ magis complicatis ista deductis valde molesta sit, demonstremus, quomodo pro expressione ipsius Δ quacunque distributionem relationum inventarum in necessarias et superfluas ex ipsis aequationibus differentialibus petere liceat, e quibus relationes illae proveniunt. Antemittimus observationes sequentes.

Sint Δ, U functiones ipsarum φ, φ' quaecunque, ac statuantur

$$\Phi = \Delta.\frac{dU}{d\varphi} + n\frac{d\Delta}{d\varphi}.U = \frac{d.\Delta U}{d\varphi} + (n-1)\frac{d\Delta}{d\varphi}.U,$$

$$\Phi' = \Delta.\frac{dU}{d\varphi'} + n\frac{d\Delta}{d\varphi'}.U = \frac{d.\Delta U}{d\varphi'} + (n-1)\frac{d\Delta}{d\varphi'}.U,$$

erit

$$\frac{d\Phi}{d\varphi'} - \frac{d\Phi'}{d\varphi} = (n-1)\left[\frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'} - \frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}\right],$$

$$\frac{d\Delta}{d\varphi}.\Phi' - \frac{d\Delta}{d\varphi'}.\Phi = \Delta\left[\frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'} - \frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}\right],$$

ideoque

$$(n-1)\left[\frac{d\Delta}{d\varphi}.\Phi'-\frac{d\Delta}{d\varphi'}.\Phi\right]=\Delta\left[\frac{d\Phi}{d\varphi'}-\frac{d\Phi'}{d\varphi}\right]$$

sive

$$18.\qquad \Delta\frac{d\Phi}{d\varphi'}+(n-1)\frac{d\Delta}{d\varphi'}.\Phi=\Delta\frac{d\Phi'}{d\varphi}+(n-1)\frac{d\Delta}{d\varphi}.\Phi'.$$

Si $U=\Delta^{-n}$, habetur identice $\Phi=0$, $\Phi'=0$, e quibus aequationibus, posito

$$U=\Sigma p_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

duo proveniunt systemata aequationum, quae inter ipsas $p_{i,i'}$ locum habere debent. Sed ubi per alterum systema iam identice habetur $\Phi=0$, erit etiam e (18.):

$$19.\qquad 0=\Delta\frac{d\Phi'}{d\varphi}+(n-1)\frac{d\Delta}{d\varphi}.\Phi'.$$

Ope huius aequationis, posito

$$\Phi'=\Sigma P_i e^{i\varphi\sqrt{-1}},$$

coëfficientes P_i ad certum earum numerum revocantur P_α, P_β, P_γ cet.; quibus evanescentibus, omnes P_i sponte evanescunt. Unde in altero aequationum systemate numero i tantum valores α, β, γ cet. tribuantur necesse est. Eidem aequationi (19.) etiam satisfit, si loco Φ' ponitur $\Delta^{-(n-1)}$, unde posito

$$\Delta^{-(n-1)}=\Sigma H_i e^{i\varphi\sqrt{-1}},$$

etiam ipsae H_i omnes ad H_α, H_β, H_γ cet. revocari possunt. Qua de re habetur haec regula generalis:

„*Designante* Δ *expressionem ipsarum* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, $\cos\varphi'$, $\sin\varphi'$, *quamcunque rationalem, integram, finitam, sit* $U=\Delta^{-n}$ *in seriem evoluta* $\Sigma p_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}}$, *qua substituta expressione prodeat:*

$$\Delta.\frac{dU}{d\varphi}+n\frac{d\Delta}{d\varphi}.U=\Sigma g_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

$$\Delta.\frac{dU}{d\varphi'}+n\frac{d\Delta}{d\varphi'}.U=\Sigma h_{i,i'}e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}};$$

statuamus porro, posito

$$\Delta^{-(n-1)}=\Sigma H_i e^{i\varphi\sqrt{-1}},$$

coëfficientes, ad quas reliquae H_i *omnes revocari possunt, esse* H_α, H_β, H_γ *cet.: tum ex aequationibus, quae inter ipsas* $p_{i,i'}$ *locum habent,* $g_{i,i'}=0$, $h_{\alpha,i'}=0$, $h_{\beta,i'}=0$, $h_{\gamma,i'}=0$ *cet. reliquae* $h_{i,i'}=0$ *sponte fluunt; illae autem, nisi casibus specialibus exceptis, omnes a se independentes sunt.*"

Quoties Δ formam habet $A+B\cos\varphi+C\sin\varphi$, ubi A, B, C sunt functiones ipsius φ', si ponitur

$$\Delta^{-(n-1)} = \Sigma H_i e^{i\varphi\sqrt{-1}},$$

notum est, e H_0, H_1 reliquas omnes H_i determinari; quo igitur casu, sicuti in nostra quaestione, ad reductionem ipsarum $p_{i,i'}$ aequationes $g_{i,i'}=0$, $h_{0,i'}=0$, $h_{1,i'}=0$ et sufficiunt et necessariae sunt; reliquae $h_{i,i'}=0$ illis continentur.

Si $n=1$, aequationes, e quibus relationes inter ipsas $p_{i,i'}$ peti debent, sunt

$$\Delta U = 1, \qquad \frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}-\frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'} = 0.$$

Statuatur

$$\Delta U - 1 = \Phi, \qquad \frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{dU}{d\varphi}-\frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{dU}{d\varphi'} = \Phi',$$

erit

$$\frac{d\Delta}{d\varphi'}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi}-\frac{d\Delta}{d\varphi}\cdot\frac{d\Phi}{d\varphi'} = \Delta\Phi'.$$

Hinc, ubi per alterum aequationum systema satisfactum est aequationi $\Phi=0$, sponte etiam habetur

$$\Delta\Phi' = 0.$$

Huius aequationis ope, si statuitur

$$\Phi' = \Sigma H_i e^{i\varphi\sqrt{-1}},$$

coëfficientes H, ad certum earum numerum H_α, H_β, H_γ cet. revocantur, quibus evanescentibus omnes reliquae H_i sponte evanescunt; unde in altero systemate aequationum, quod e $\Phi'=0$ provenit, indici i isti tantum valores α, β, γ cet. tribuantur necesse est, cum conditiones, quae reliquis ipsius i valoribus respondent, ex illis sponte demanent. Quae est regulae generalis modificatio quaedam, quae casu $n=1$ locum habet.

Si per regulam appositam vel ullo alio modo aequationum, quae inter ipsas $p_{i,i'}$ locum habent, distributio in necessarias et abundantes facta est, numerum ipsarum $p_{i,i'}$, ad quas reliquae omnes revocari possunt, et quae ipsae irreductibiles sunt, *sine omni ambiguitate* determinas. Quo numero invento, si ex aequationibus $g_{i,i'}=0$, $h_{i,i'}=0$ ullum aliud systema eligere placet, cuius ope omnes $p_{i,i'}$ ad illum numerum revocare licet, has quoque ut necessarias considerare licet, ac certo scis, reliquas illis contineri. Alioquin haberetur nova relatio, qua coëfficientes, ad quas reliquae omnes revocatae sunt, ulterius reducerentur, quod fieri non posse suppositum est.

7.

Per quartam aequationum (8.),

$$0=i(2l''p_{i,i'+1}+lp_{i,i'})+l'[(i'+i+n-1)p_{i-1,i'}-(i'-i+n-1)p_{i+1,i'}],$$

termini, quorum secundus index $i'+1$, per alios exprimuntur, quorum secundus index proxime antecedens i'. Quas expressiones si substituimus in aequatione

$$0=i(2l''p_{i,i'}+lp_{i,i'+1})+l'[(i-i'+n-2)p_{i-1,i'+1}+(i'+i-n+2)p_{i+1,i'+1}],$$

quae obtinetur e tertia aequationum (8.) ponendo $i'+1$ loco i': provenit aequatio linearis inter eas tantum coëfficientes $p_{i,i'}$, quibus alter index i' idem est. Quae, indice omnibus coëfficientibus communi omisso post leues reductiones fit:

$$\begin{aligned}20.\quad 0=l'l'[(i+1)(i+i'+n-2)(i-i'+n-2)p_{i-2}+(i-1)(i-i'-n+2)(i+i'-n+2)p_{i+2}]\\+(i^2-1)ll'[(2i+2n-3)p_{i-1}+(2i-2n+3)p_{i+1}]\\+i[2(i'^2-(n-1)^2)l'l'+(i^2-1)(l^2+2l'l'+4l''l'')]p_i.\end{aligned}$$

Cuius aequationis ope terminus quilibet p_i e quatuor antecedentibus determinatur; per quam igitur omnes ad quatuor p_0, p_1, p_2, p_3 revocare licet. Permutando l' et l'', i et i', e (20.) aliam eruis aequationem inter quinque coëfficientes $p_{i,i'-2}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i,i'}$, $p_{i,i'+1}$, $p_{i,i'+2}$, quibus prior index i idem est.

Aequationem (20.) etiam sic exhibere licet:

$$\begin{aligned}&i'^2l'l'[(i+1)p_{i-2}+(i-1)p_{i+2}-2ip_i]\\=\;&l'l'[(i+1)(i+n-2)^2p_{i-2}+(i-1)(i-n+2)^2p_{i+2}-2(n-1)^2ip_i]\\&+(i^2-1)\{ll'[(2i+2n-3)p_{i-1}+(2i-2n+3)p_{i+1}]+i(l^2+2l'^2-4l''^2)p_i\}.\end{aligned}$$

Casu $n=\frac{1}{2}$ forma etiam haec ei conciliari potest:

$$\begin{aligned}&(i'^2-\tfrac{1}{4})l'^2[(i+1)p_{i-2}+(i-1)p_{i+2}-2ip_i]\\=\;&i(i^2-1)[l'^2(p_{i-2}+p_{i+2})+2ll'(p_{i-1}+p_{i+1})+(l^2+2l'^2-4l''^2)p_i],\end{aligned}$$

quae paullo simplicior est.

Posito

$$\Delta^{-n}=U=\Sigma P_{i'}e^{i'\varphi'\sqrt{-1}},$$

cum sit e notatatione adhibita, omisso posteriore indice i',

$$P_{i'}=p+2p_1\cos\Phi+2p_2\cos2\Phi+2p_3\cos3\Phi+\dots,$$

functionem $P_{i'}$ ope relationum (20.), quae inter coëfficientes p_i locum habent, per aequationem differentialem linearem definire licet. Quam hoc modo inquirimus.

Aequationem (20.) in formam redigimus sequentem:

$$\begin{aligned}0 = &[a+a'(i+2)+a''(i+2)^2+(i+2)^3]l'l'p_{i+2}\\ &-[a-a'(i-2)+a''(i-2)^2-(i-2)^3]l'l'p_{i-2}\\ &+[b'(i+1)+b''(i+1)^2+2(i+1)^3]ll'p_{i+1}\\ &+[b'(i-1)-b''(i-1)^2+2(i-1)^3]ll'p_{i-1}+[c'i+c'''i^3]p_i,\end{aligned}$$

erit

$$a = 3(i'^2-n^2), \quad a' = -(i'^2-n^2-6n), \quad a'' = -(2n+3),$$
$$b' = 2(2n-1), \quad b'' = -(2n+3),$$
$$c' = 2[i'^2-(n-1)^2]-(ll+2l'l'-4l''l''), \quad c''' = ll+2l'l'-4l''l''.$$

Iam statuamus

$$al'l'(p_{i+2}-p_{i-2}) = L_i,$$
$$a'l'l'[(i+2)p_{i+2}+(i-2)p_{i-2}]+b'll'[(i+1)p_{i+1}+(i-1)p_{i-1}]+c'p_i = L'_i,$$
$$a''l'l'[(i+2)^2p_{i+2}-(i-2)^2p_{i-2}]+b''ll'[(i+1)^2p_{i+1}-(i-1)^2p_{i-1}] = L''_i,$$
$$l'l'[(i+2)^3p_{i+2}+(i-2)^3p_{i-2}]+2ll'[(i+1)^3p_{i+1}+(i-1)^3p_{i-1}]+c'''p_i = L'''_i,$$

erit aequatio proposita:

$$21. \qquad 0 = L_i+L'_i+L''_i+L'''_i.$$

Habetur autem, ipsi i valores omnes a $-\infty$ usque ad $+\infty$ tribuendo:

$$P_{i'} = \Sigma p_i\cos i\Phi, \quad \frac{dP_{i'}}{d\varphi} = -\Sigma ip_i\sin i\Phi, \quad \frac{d^2P_{i'}}{\partial\varphi^2} = -\Sigma i^2p_i\cos i\Phi,$$
$$\frac{d^3P_{i'}}{d\varphi^3} = \Sigma i^3p_i\sin i\Phi,$$

unde

$$\begin{aligned}-2al'l'\sin 2\Phi.P_{i'} &= \Sigma L_i\sin i\Phi,\\ -[2a'l'l'\cos 2\Phi+2b'll'\cos\Phi+c']\frac{dP_{i'}}{d\varphi} &= \Sigma L'_i\sin i\Phi,\\ 2[a''l'l'\sin 2\Phi+b''ll'\sin\Phi]\frac{d^2P_{i'}}{d\varphi^2} &= \Sigma L''_i\sin i\Phi,\\ [2l'l'\cos 2\Phi+4ll'\cos\Phi+c''']\frac{d^3P_{i'}}{d\varphi^3} &= \Sigma L'''_i\sin i\Phi.\end{aligned}$$

Quibus summatis, simulque ipsarum a, a' cet. valoribus substitutis, prodit e (21.) aequatio differentialis quaesita, qua functionem $P_{i'}$ definire licet:

$$22. \qquad 0 = MP_{i'}+M'\frac{dP_{i'}}{d\varphi}+M''\frac{d^2P_{i'}}{d\varphi^2}+M'''\frac{d^3P_{i'}}{d\varphi^3},$$

siquidem statuitur:

$$M = -6(i'^2-n^2)l'l'\sin 2\Phi,$$
$$M' = 2(i'^2-n^2-6n)l'l'\cos 2\Phi-4(2n-1)ll'\cos\Phi$$
$$-2[i'^2-(n-1)^2]l'l'+ll+2l'l'-4l''l'',$$
$$M'' = -2(2n+3)l'[l\sin\Phi+l'\sin 2\Phi] = -2(2n+3)l'\sin\Phi(l+2l'\cos\Phi),$$
$$M''' = 2l'l'\cos 2\Phi+4ll'\cos\Phi+ll+2l'l'-4l''l'' = (l+2l'\cos\Phi)^2-4l''l''.$$

Expressionem M' etiam hoc modo repraesentare licet:

$M' = (l+2l'\cos\Phi)^2-4l''^2-4(i'^2-(n+1)^2)l'^2\sin^2\Phi-8nl'\cos\Phi(l+2l'\cos\Phi)$.
Permutatis in aequatione differentiali l' et l'', i et i', Φ et Φ', alteram eruis, qua definiuntur functiones ipsius Φ', quae in evolutione proposita in cosinus multiplorum ipsius Φ multiplicantur.

Integratio completa aequationis differentialis tertii ordinis propositae non nisi casibus specialibus succedit; sed eius unum integrale primum obtinebimus sequentibus.

8.

Operae pretium est, ex ipsis aequationibus (3.):

$$\Delta\frac{dU}{d\varphi}+n\frac{d\Delta}{d\varphi}.U = 0, \qquad \Delta\frac{dU}{d\varphi'}+n\frac{d\Delta}{d\varphi'}.U = 0,$$

via directa derivare aequationem differentialem, qua functio $P_{i'}$ definiatur. Quae simul methodus casibus, quibus Δ formam magis complicatam habet, adhiberi poterit, quibus casibus methodus, qua antecedentibus usi sumus, nimis molesta foret.

Sit rursus

$$\Delta^{-n} = U = \Sigma P_i e^{i'\varphi\sqrt{-1}},$$

ac ponatur

$$l+2l'\cos\Phi = A, \qquad \Delta = A+2l''\cos\Phi',$$

unde etiam

$$P_{i'} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi'\cos i'\varphi'}{[A+2l''\cos\varphi']^n}.$$

Expressionibus ipsarum Δ, U substitutis in duabus aequationibus differentialibus, habentur aequationes duae:

$$0 = i'[AP_{i'}+l''(P_{i'-1}+P_{i'+1})]+(n-1)l''(P_{i'-1}-P_{i'+1}),$$
$$0 = A\frac{dP_{i'}}{d\varphi}+l''\left(\frac{dP_{i'-1}}{d\varphi}+\frac{dP_{i'+1}}{d\varphi}\right)+n\frac{dA}{d\varphi}.P_{i'}.$$

Quarum priore differentiata, ope posterioris provenit:

$$i'\frac{dA}{d\varphi}.P_{i'} = l''\left(\frac{dP_{i'-1}}{d\varphi}-\frac{dP_{i'+1}}{d\varphi}\right).$$

Statuamus

$$\frac{dA}{d\varphi} = A', \qquad \frac{d^2A}{d\varphi^2} = A'', \qquad \frac{d^3A}{d\varphi^3} = A''',$$
$$\frac{dP}{d\varphi} = P', \qquad \frac{d^2P}{d\varphi^2} = P'', \qquad \frac{d^3P}{d\varphi^3} = P''',$$

e duabus aequationibus proxime antecedentibus provenit:

$$2l''P'_{i'-1} = -AP'_{i'}+(i'-n)A'P_{i'},$$
$$2l''P'_{i'+1} = -AP'_{i'}-(i'+n)A'P_{i'}.$$

Si in priore loco i' ponimus $i'+1$, prodit addendo et subtrahendo

$$2l''P'_{i'} = -AP'_{i'+1}+(i'-n+1)A'P_{i'+1};$$

ex hac et posteriore eliminata $P'_{i'+1}$, prodit:

$$-2l''(i'-n+1)A'P_{i'+1} = (A^2-4l''^2)P'_{i'}+(i'+n)AA'P_{i'},$$

sive

$$-2l''(i'-n+1)P_{i'+1} = \frac{A^2-4l''^2}{A'}.P'_{i'}+(i'+n)AP_{i'},$$

qua differentiata obtinemus:

$$\frac{A^2-4l''^2}{A'}.P''_{i'}+\left[-\frac{A''(A^2-4l''^2)}{A'^2}+(i'+n+2)A\right]P'_{i'}+(i'+n)A'P_{i'}$$
$$= -2l''(i'-n+1)P'_{i'+1} = (i'-n+1)[AP'_{i'}+(i'+n)A'P_{i'}],$$

unde, multiplicatione per A'^2 facta,

$$23. \qquad 0 = (A^2-4l''^2)A'P''_{i'}$$
$$+[-(A^2-4l''^2)A''+(2n+1)AA'^2]P'_{i'}-(i'^2-n^2)A'^3P_{i'},$$

quae est aequatio differentialis linearis secundi ordinis, cui functio $P_{i'}$ satisfacit.

Aequatio (23.) valet, quaecunque in expressione

$$\Delta = A+2l''\cos\varphi'$$

sit A ipsius φ functio; casu nostro substituendum est:

$$A = l+2l'\cos\varphi, \qquad A' = -2l'\sin\varphi, \qquad A'' = -2l'\cos\varphi.$$

Quo casu ut et (23.) aequatio tertii ordinis (22.), supra per aliam methodum inventa, deducatur, aequatio (23.) rursus differentietur, quo facto, cum sit $A''' = -A'$ termini omnes per A' dividi poterunt, unde prodit:

$$24. \qquad 0 = (A^2-4l''^2)P'''_{i'}+(2n+3)AA'P''_{i'}$$
$$+[A^2-4l''^2-(i'^2-(n+1)^2)A'^2+4nAA'']P'_{i'}-3(i'^2-n^2)A'A''P_{i'},$$

quae cum aequatione (22.) convenit. Cuius igitur vice versa integrale est aequatio secundi ordinis (23.).

Aequatio (23.), quamvis inferioris ordinis sit atque illa supra inventa (22.), tamen condendis relationibus inter coëfficientes evolutionis ipsius $P_{i'}$ minus idonea est. Nam e (22.) petuntur relationes lineares (20.) inter *quinque* coëfficientes p_i se proxime insequentes; contra relationes lineares, quae e (23.) petuntur, inter *septem* erunt. Generaliter, designante P seriem infinitam secundum cosinus sinusve multiplorum anguli φ procedentem, quae aequationi differentiali lineari satisfacit: simplicitas relationum inter coëfficientes ipsius P, quae ex aequationi illa differentiali petuntur, nullo modo pendet ab ordine aequationis differentialis, sed tantum a simplicitate expressionum ipsius φ, per quas in aequatione differentiali ipsa P

$$M' = (l+2l'\cos\Phi)^2-4l''^2-4(i'^2-(n+1)^2)l'^2\sin^2\Phi-8nl'\cos\Phi(l+2l'\cos\Phi).$$

Permutatis in aequatione differentiali l' et l'', i et i', Φ et Φ', alteram eruis, qua definiuntur functiones ipsius Φ', quae in evolutione proposita in cosinus multiplorum ipsius Φ multiplicantur.

Integratio completa aequationis differentialis tertii ordinis propositae non nisi casibus specialibus succedit; sed eius unum integrale primum obtinebimus sequentibus.

8.

Operae pretium est, ex ipsis aequationibus (3.):

$$\Delta\frac{dU}{d\varphi}+n\frac{d\Delta}{d\varphi}.U = 0, \qquad \Delta\frac{dU}{d\varphi'}+n\frac{d\Delta}{d\varphi'}.U = 0,$$

via directa derivare aequationem differentialem, qua functio $P_{i'}$ definiatur. Quae simul methodus casibus, quibus Δ formam magis complicatam habet, adhiberi poterit, quibus casibus methodus, qua antecedentibus usi sumus, nimis molesta foret.

Sit rursus

$$\Delta^{-n} = U = \Sigma P_i e^{i'\varphi\sqrt{-1}},$$

ac ponatur

$$l+2l'\cos\Phi = A, \qquad \Delta = A+2l''\cos\Phi',$$

unde etiam

$$P_{i'} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\varphi'\cos i'\varphi'}{[A+2l''\cos\varphi']^n}.$$

Expressionibus ipsarum Δ, U substitutis in duabus aequationibus differentialibus, habentur aequationes duae:

$$0 = i'[AP_{i'}+l''(P_{i'-1}+P_{i'+1})]+(n-1)l''(P_{i'-1}-P_{i'+1}),$$

$$0 = A\frac{dP_{i'}}{d\varphi}+l''\left(\frac{dP_{i'-1}}{d\varphi}+\frac{dP_{i'+1}}{d\varphi}\right)+n\frac{dA}{d\varphi}.P_{i'}.$$

Quarum priore differentiata, ope posterioris provenit:

$$i'\frac{dA}{d\varphi}.P_{i'} = l''\left(\frac{dP_{i'-1}}{d\varphi}-\frac{dP_{i'+1}}{d\varphi}\right).$$

Statuamus

$$\frac{dA}{d\varphi} = A', \qquad \frac{d^2A}{d\varphi^2} = A'', \qquad \frac{d^3A}{d\varphi^3} = A''',$$

$$\frac{dP}{d\varphi} = P', \qquad \frac{d^2P}{d\varphi^2} = P'', \qquad \frac{d^3P}{d\varphi^3} = P''',$$

e duabus aequationibus proxime antecedentibus provenit:

$$2l''P'_{i'-1} = -AP'_{i'}+(i'-n)A'P_{i'},$$

$$2l''P'_{i'+1} = -AP'_{i'}-(i'+n)A'P_{i'}.$$

Si in priore loco i' ponimus $i'+1$, prodit addendo et subtrahendo:

$$2l''P'_{i'} = -AP'_{i'+1}+(i'-n+1)A'P_{i'+1};$$

ex hac et posteriore eliminata $P'_{i'+1}$, prodit:

$$-2l''(i'-n+1)A'P_{i'+1} = (A^2-4l''^2)P'_{i'}+(i'+n)AA'P_{i'},$$

sive

$$-2l''(i'-n+1)P_{i'+1} = \frac{A^2-4l''^2}{A'}.P'_{i'}+(i'+n)AP_{i'},$$

qua differentiata obtinemus:

$$\frac{A^2-4l''^2}{A'}.P''_{i'}+\left[-\frac{A''(A^2-4l''^2)}{A'^2}+(i'+n+2)A\right]P'_{i'}+(i'+n)A'P_{i'}$$

$$= -2l''(i'-n+1)P'_{i'+1} = (i'-n+1)[AP'_{i'}+(i'+n)A'P_{i'}],$$

unde, multiplicatione per A'^2 facta,

$$23. \quad 0 = (A^2-4l''^2)A'P''_{i'}$$

$$+[-(A^2-4l''^2)A''+(2n+1)AA'^2]P'_{i'}-(i'^2-n^2)A'^3P_{i'},$$

quae est aequatio differentialis linearis secundi ordinis, cui functio $P_{i'}$ satisfacit.

Aequatio (23.) valet, quaecunque in expressione

$$\Delta = A+2l''\cos\Phi'$$

sit A ipsius Φ functio; casu nostro substituendum est:

$$A = l+2l'\cos\Phi, \qquad A' = -2l'\sin\Phi, \qquad A'' = -2l'\cos\Phi.$$

Quo casu ut et (23.) aequatio tertii ordinis (22.), supra per aliam methodum inventa, deducatur, aequatio (23.) rursus differentietur, quo facto, cum sit $A''' = -A'$ termini omnes per A' dividi poterunt, unde prodit:

$$24. \quad 0 = (A^2-4l''^2)P'''_{i'}+(2n+3)AA'P''_{i'}$$

$$+[A^2-4l''^2-(i'^2-(n+1)^2)A'^2+4nAA'']P'_{i'}-3(i'^2-n^2)A'A''P_{i'},$$

quae cum aequatione (22.) convenit. Cuius igitur vice versa integrale est aequatio secundi ordinis (23.).

Aequatio (23.), quamvis inferioris ordinis sit atque illa supra inventa (22.), tamen condendis relationibus inter coëfficientes evolutionis ipsius $P_{i'}$ minus idonea est. Nam e (22.) petuntur relationes lineares (20.) inter *quinque* coëfficientes p_i se proxime insequentes; contra relationes lineares, quae e (23.) petuntur, inter *septem* erunt. Generaliter, designante P seriem infinitam secundum cosinus sinusve multiplorum anguli Φ procedentem, quae aequationi differentiali lineari satisfacit: simplicitas relationum inter coëfficientes ipsius P, quae ex aequationi illa differentiali petuntur, nullo modo pendet ab ordine aequationis differentialis, sed tantum a simplicitate expressionum ipsius Φ, per quas in aequatione differentiali ipsa P

eiusque differentialia multiplicantur. Quae expressiones in (22.) simpliciores evadunt propter divisionem omnium terminorum, quam per A' sive $\sin\Phi$ facere licuit.

9.

Demonstremus iam, quomodo posito

$$\Delta^{-n} = \Sigma p_{i,i'} e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}}, \qquad \Delta^{-(n+1)} = \Sigma q_{i,i'} e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

termini $q_{i,i'}$ ex ipsis $p_{i,i'}$ commodissime determinentur. Ad quam determinationem hanc viam inire licet.

Habetur, integralibus a 0 usque ad π extensis,

$$p_{i,i'} = \frac{1}{\pi^2}\iint\frac{\cos i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^n},$$

$$q_{i,i'} = \frac{1}{\pi^2}\iint\frac{\cos i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^{n+1}},$$

unde etiam, integrando per partes:

$$i\,p_{i,i'} = \frac{-n}{\pi^2}\iint\frac{2l'\sin\varphi\sin i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^{n+1}},$$

$$i'\,p_{i,i'} = \frac{-n}{\pi^2}\iint\frac{2l''\sin\varphi'\sin i'\varphi'\cos i\varphi\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^{n+1}},$$

ideoque, cum sit:

$$n\,p_{i,i'} = \frac{n}{\pi^2}\iint\frac{(l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi')\cos i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^{n+1}},$$

erit:

$$(n-i-i')p_{i,i'}$$

$$= \frac{n}{\pi^2}\iint\frac{[l\cos i\varphi\cos i'\varphi'+2l'\cos(i-1)\varphi\cos i'\varphi'+2l''\cos(i'-1)\varphi\cos i\varphi]\,d\varphi\,d\varphi'}{\Delta^{n+1}},$$

sive

$$\frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'} = l\,q_{i,i'}+2l'q_{i-1,i'}+2l''q_{i,i'-1}.$$

Ponamus in formula antecedente primum $1-i$ loco i, deinde $1-i'$ loco i', denique simul $1-i$ loco i, $1-i'$ loco i'; unde, cum $p_{i,i'}$, $q_{i,i'}$ non mutentur, indicum signis in opposita mutatis, prodit systema quatuor aequationum:

$$25.\quad\begin{cases}\dfrac{n-i-i'}{n}\cdot p_{i,i'} = l\,q_{i,i'}+2l'q_{i-1,i'}+2l''q_{i,i'-1},\\[2mm] \dfrac{n-1+i-i'}{n}\cdot p_{i-1,i'} = 2l'q_{i,i'}+l\,q_{i-1,i'}+2l''q_{i-1,i'-1},\\[2mm] \dfrac{n-1+i'-i}{n}\cdot p_{i,i'-1} = 2l''q_{i,i'}+l\,q_{i,i'-1}+2l'q_{i-1,i'-1},\\[2mm] \dfrac{n-2+i-i'}{n}\cdot p_{i-1,i'-1} = 2l''q_{i-1,i'}+2l'q_{i,i'-1}+l\,q_{i-1,i'-1}.\end{cases}$$

Quarum aequationum resolutione coëfficientes $q_{i,i'}$ per $p_{i,i'}$ determinantur, quod propositum erat.

Ipsam resolutionem modo sequente non ineleganter transigis. Statuatur:

$l+2l'+2l''=k,\quad l+2l'-2l''=k',\quad l-2l'+2l''=k'',\quad l-2l'-2l''=k'''$;

per solas additiones et subtractiones e quatuor aequationibus propositis obtines:

$$26.\quad \begin{cases} k[q_{i,i'}+q_{i-1,i'}+q_{i,i'-1}+q_{i-1,i'-1}] = \\ \frac{n-i-i'}{n}.p_{i,i'}+\frac{n-1+i-i'}{n}.p_{i-1,i'}+\frac{n-1+i'-i}{n}.p_{i,i'-1}+\frac{n-2+i+i'}{n}.p_{i-1,i'-1}, \\ k'[q_{i,i'}+q_{i-1,i'}-q_{i,i'-1}-q_{i-1,i'-1}] = \\ \frac{n-i-i'}{n}.p_{i,i'}+\frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'}-\frac{n-1+i'-i}{n}.p_{i,i'-1}-\frac{n-2+i+i'}{n}.p_{i-1,i'-1}, \\ k''[q_{i,i'}-q_{i-1,i'}+q_{i,i'-1}-q_{i-1,i'-1}] = \\ \frac{n-i-i'}{n}.p_{i,i'}-\frac{n-1+i-i'}{n}.p_{i-1,i'}+\frac{n-1+i'-i}{n}.p_{i,i'-1}-\frac{n-2+i+i'}{n}.p_{i-1,i'-1}, \\ k'''[q_{i,i'}-q_{i-1,i'}-q_{i,i'-1}+q_{i-1,i'-1}] = \\ \frac{n-i-i'}{n}.p_{i,i'}-\frac{n-1+i-i'}{n}.p_{i-1,i'}-\frac{n-1+i'-i}{n}.p_{i,i'-1}+\frac{n-2+i+i'}{n}.p_{i-1,i'-1}. \end{cases}$$

Quibus aequationibus respective per k, k', k'', k''' divisis, rursus per solas additiones et substractiones, posito

$$27.\quad \begin{cases} \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''}+\frac{1}{k'''} = 4h, \\ \frac{1}{k}+\frac{1}{k'}-\frac{1}{k''}-\frac{1}{k'''} = 4h', \\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k'}+\frac{1}{k''}-\frac{1}{k'''} = 4h'', \\ \frac{1}{k}-\frac{1}{k'}-\frac{1}{k''}+\frac{1}{k'''} = 4h''', \end{cases}$$

obtines:

$$28.\quad \begin{cases} q_{i,i'} = h.\frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'}+h'.\frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'}+h''.\frac{n-1+i'-i}{n}p_{i,i'-1}+h'''.\frac{n-2+i+i'}{n}p_{i-1,i'-1}, \\ q_{i-1,i'} = h'.\frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'}+h.\frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'}+h'''.\frac{n-1+i'-i}{n}p_{i,i'-1}+h''.\frac{n-2+i+i'}{n}p_{i-1,i'-1}, \\ q_{i,i'-1} = h''.\frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'}+h'''.\frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'}+h.\frac{n-1+i'-i}{n}p_{i,i'-1}+h'.\frac{n-2+i+i'}{n}p_{i-1,i'-1}, \\ q_{i-1,i'-1} = h'''.\frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'}+h''.\frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'}+h'.\frac{n-1+i'-i}{n}p_{i,i'-1}+h.\frac{n-2+i+i'}{n}p_{i-1,i'-1}. \end{cases}$$

Quae aequationes omnns ex una derivari possunt, ponendo $1-i$ loco i, $1-i'$ loco i' vel simul utrumque. Statuto

$$N = kk'k''k''' = (l+2l'+2l'')(l+2l'-2l'')(l-2l'+2l'')(l-2l'-2l''),$$

ipsae h, h', h'', h''' per l, l', l'' exhibentur per formulas:

$$29.\quad \begin{cases} h = \dfrac{l(k'k''+kk''')}{2N} = \dfrac{l[l^2-4l'^2-4l''^2]}{N}, \\ h' = \dfrac{-l'(kk''+k'k''')}{N} = \dfrac{-2l'[l^2-4l'^2+4l''^2]}{N}, \\ h'' = \dfrac{-l''(kk'+k''k''')}{N} = \dfrac{-2l''[l^2+4l'^2-4l''^2]}{N}, \\ h''' = \dfrac{l(k'k''-kk''')}{N} = \dfrac{8ll'l''}{N}. \end{cases}$$

Docent formulae antecedentes quomodo terminos quatuor $p_{i,i'}$, $p_{i-1,i'}$, $p_{i,i'-1}$, $p_{i-1,i'-1}$ per quatuor terminos iisdem indicibus affectos $q_{i,i'}$, $q_{i-1,i'}$, $q_{i,i'-1}$, $q_{i-1,i'-1}$ et vice versa hos per illos exprimere liceat.

Pervenimus hac occasione ad systema quatuor aequationum linearium, quae formam curiosam habent.

$$\begin{aligned} aw+bx+cy+dz &= m, \\ bw+ax+dy+cz &= n, \\ cw+dx+ay+bz &= p, \\ dw+cx+by+az &= q. \end{aligned}$$

Casu nostro est $d=0$; sed methodus eadem casui applicatur generaliori, quo d non evanescit. Et aequationes inversae, quibus w, x, y, z per m, n, p, q exhibentur, rursus eadem forma gaudent.

Si $i=0$, $i'=0$, formulae inventae evadunt:

$$30.\quad \begin{cases} q_{0,0} = h\,p_{0,0} + \frac{n-1}{n}h'\,p_{1,0} + \frac{n-1}{n}h''\,p_{0,1} + \frac{n-2}{n}h'''\,p_{1,1}, \\ q_{1,0} = h'\,p_{0,0} + \frac{n-1}{n}h\,p_{1,0} + \frac{n-1}{n}h'''\,p_{0,1} + \frac{n-2}{n}h''\,p_{1,1}, \\ q_{0,1} = h''\,p_{0,0} + \frac{n-1}{n}h'''\,p_{1,0} + \frac{n-1}{n}h\,p_{0,1} + \frac{n-2}{n}h'\,p_{1,1}, \\ q_{1,1} = h'''\,p_{0,0} + \frac{n-1}{n}h''\,p_{1,0} + \frac{n-1}{n}h'\,p_{0,1} + \frac{n-1}{n}h\,p_{1,1}. \end{cases}$$

Ex aequatione

$$k[q_{i,i'}+q_{i-1,i'}+q_{i,i'-1}+q_{i-1,i'-1}]$$
$$= \frac{n-i-i'}{n}p_{i,i'} + \frac{n-1+i-i'}{n}p_{i-1,i'} + \frac{n-1+i'-i}{n}p_{i,i'-1} + \frac{n-2+i+i'}{n}p_{i-1,i'-1}$$

observo reliquas tres appositas eius similes per considerationem deduci potuisse, quae facile patet, mutato l' in $-l'$, ipsas $p_{i,i'}$, $q_{i,i'}$, immutatas manere, si i par, valores oppositos induere, si i impar, eodemque modo, mu-

tato l'' in $-l''$, ipsas $p_{i,i'}$, $q_{i,i'}$ immutatas manere, si i' par, valores oppositos induere, si i' impar.

Aequationem, qua supra $p_{i,i'}$ per ipsas $q_{i,i'}$ expressimus, etiam hoc modo deducere licet. Ex aequationibus enim

$$\frac{d.\Delta^{-n}}{d\varphi} = \sqrt{-1}\,\Sigma\, i\, p_{i,i'}\, e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}} = 2n\,l'\sin\varphi\,\Sigma\, q_{i,i'}\, e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

$$\frac{d.\Delta^{-n}}{d\varphi'} = \sqrt{-1}\,\Sigma\, i' p_{i,i'}\, e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}} = 2n\,l''\sin\varphi'\,\Sigma\, q_{i,i'}\, e^{(i\varphi+i'\varphi')\sqrt{-1}},$$

sequitur:

$$31. \quad -p_{i,i'} = \frac{n}{i}.\,l'(q_{i-1,i'}-q_{i+1,i'}) = \frac{n}{i'}\,l''(q_{i,i'-1}-q_{i,i'+1}).$$

Habetur autem ex aequationum (4.) prima, posito $n+1$ loco n, q loco p,

$$0 = i'(lq_{i,i'}+2l'q_{i-1,i'}) - l''[(i-i'-n)q_{i,i'-1}-(i+i'-n)q_{i,i'+1}],$$

sive

$$i'[lq_{i,i'}+2l'q_{i-1,i'}+2l''q_{i,i'-1}] = (i+i'-n)l''[q_{i,i'-1}-q_{i,i'+1}],$$

unde prodit

$$lq_{i,i'}+2l'q_{i-1,i'}+2l''q_{i,i'-1} = \frac{n-i-i'}{n}\,p_{i,i'},$$

quae est aequatio supra alia methodo inventa.

10.

Seorsim considerari debet casus, quo $N = kk'k''k''' = 0$, sive una e quantitatibus k, k', k'', k''' evanescit, quippe quo casu solutio quatuor aequationum linearium prepositarum fit illusoria. Et facile determinatur, quaenam e quatuor quantitatibus illis evanescere possit; nam cum in hac quaestione supponi debeat, ipsum $\Delta = l+2l'\cos\varphi+2l''\cos\varphi'$ negativum fieri non posse, ipsum l minor esse non potest quam summa ipsorum $2l'$, $2l''$ positive acceptorum; unde quoties $l\pm 2l'\pm 2l''=0$, bina signa $\pm$ ita determinata esse debent, ut utrumque $\pm l'$, $\pm l''$ sit negativum. Statuamus l', l'' positiva, quod licet, quia mutando φ in $\varphi+\pi$, φ' in $\varphi'+\pi$ eorum signa mutare possumus: erit in casu, quem consideramus, particulari et qui limitem constituit, quo Δ semper positivum etiam evanescere potest, e quatuor illis quantitatibus ea, quae evanescere potest,

$$k''' = l-2l'-2l'' = 0.$$

Unde prodit e formulis antecedentibus:

$$32. \quad (n-i-i')p_{i,i'}-(n-1+i-i')p_{i-1,i'}-(n-1+i'-i)p_{i,i'-1} + (n-2+i+i')p_{i-1,i'-1} = 0.$$

Quae aequatio, posito $i=0$, $i'=0$, in hanc abit:

$$33. \quad n\,p_{0,0}-(n-1)(p_{1,0}+p_{0,1})+(n-2)p_{1,1} = 0.$$

Quae docet, e quatuor terminis $p_{0,0}$, $p_{1,0}$, $p_{0,1}$, $p_{1,1}$ unum ad reliquos tres revocari posse, et cum termini omnes per quatuor illos lineariter determinentur, habetur theorema:

„*In casu limite, quo $\Delta = l+2l'\cos\Phi+2l''\cos\Phi'$, quod pro omnibus ipsorum Φ, Φ' valoribus semper positivum manere supponitur, etiam evanescere potest, coëfficientes evolutionis ipsius Δ^{-n}, secundum cosinus multiplorum utriusque Φ, Φ' factae, omnes per tres ex earum numero lineariter exhiberi possunt.*"

Ut in illo casu limite, quo $l = 2l'+2l''$, coëfficientes finitae maneant, esse debet $n<1$. Erit enim eo casu, integrationibus a 0 usque ad π extensis,

$$p_{i,i'} = \frac{1}{\pi^2}\iint\frac{\cos i\varphi\cos i'\varphi'\,d\varphi\,d\varphi'}{[2l'(1+\cos\varphi)+2l''(1+\cos\varphi')]^n},$$

sive posito $4l' = m^2$, $4l'' = m'^2$, $\Phi = 2\psi$, $\Phi' = 2\psi'$, erit

$$p_{i,i'} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2i\psi\cos 2i'\psi'\,d\psi\,d\psi'}{[m^2\cos^2\psi+m'^2\cos^2\psi']^n}.$$

Functio integranda, si n positiva, infinita evadit pro iis ipsorum ψ, ψ' valoribus, qui a $\frac{\pi}{2}$ infinite parvum discrepant; ut videamus, an ipsum quoque integrale ad valores illos extensum infinitum evadat, statuamus

$$\psi = \frac{\pi}{2}-\frac{x}{w}, \qquad \psi' = \frac{\pi}{2}-\frac{x'}{w},$$

ubi w infinite magnum; qua substitutione fit

$$p_{i,i'} = \frac{(-1)^{i+i'}4}{\pi^2 w^2}\iint\frac{\cos\frac{2ix}{w}\cos\frac{2ix'}{w}\,dx\,dx'}{\left[m^2\sin^2\frac{x}{w}+m'^2\sin^2\frac{x'}{w}\right]^n}.$$

Quod integrale extensum a $x=0$, $x'=0$ usque ad ipsorum x, x' valores quantumvis magnos, eos tamen, pro quibus $\frac{x}{w}$, $\frac{x'}{w}$ infinite parvum maneat, aequivalet parti integralis propositi, quae ad ipsorum ψ, ψ' valores angulo recto infinite propinquos extenditur et quae sola in infinitum abire potest, ab ipso autem valore integralis propositi $p_{i,i'}$ tantum quantitate finita discrepat. Quam partem, cum $\frac{x}{w}$, $\frac{x'}{w}$ semper infinite parvum maneat, exhibere possumus per expressionem simpliciorem

$$(-1)^{i+i'}\cdot\frac{4w^{2n-2}}{\pi^2}\iint\frac{dx\,dx'}{[m^2x^2+m'^2x'^2]^n}.$$

Quae posito

$$mx = r\cos\Phi, \qquad m'x' = r\sin\Phi,$$

integratione secundum φ extensa a 0 usque ad $\frac{\pi}{2}$, secundum r a 0 usque ad r, abit in hanc:

$$\frac{(-1)^{i+i'}}{mm'}\cdot\frac{4w^{2n-2}}{\pi^2}\iint\frac{r\,dr\,d\varphi}{r^{2n}}=\frac{(-1)^{i+i'}}{mm'}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2-2n}\cdot\left(\frac{w}{r}\right)^{2n-2},$$

quae, cum $\frac{w}{r}$ infinite magnum sit, fit infinite parva, si $n<1$, infinite magna, si $n\geqq 1$. Unde ipsum quoque integrale propositum $p_{i,i'}$, cum ab expressione antecedente tantum quantitate finita discrepet, finitum manet, si $n<1$, valorem infinitum induit, si $n\geqq 1$.

Aequationem

$$(n-i-i')p_{i,i'}-(n-1+i-i')p_{i-1,i'}-(n-1+i'-i)p_{i,i'-1}$$
$$+(n-2+i+i')p_{i-1,i'-1}=0,$$

concludimus ex aequatione

$$(n-i-i')p_{i,i'}-(n-1+i-i')p_{i-1,i'}-(n-1+i'-i)p_{i,i'-1}$$
$$+(n-2+i+i')p_{i-1,i'-1}=nk'''[q_{i,i'}-q_{i-1,i'}-q_{i,i'-1}+q_{i-1,i'-1}],$$

casu quo $k'''=l-2l'-2l''$ evanescit. Hinc dubium nasci potest, an aequatio illa valeat, si n inter 0 et 1; nam quia tum $n+1$ inter 1 et 2, coëfficientes omnes $q_{i,i'}$ infinitae evadunt simul cum k''' evanescente, ita ut fieri posse videatur, ut expressio

$$k'''[q_{i,i'}-q_{i-1,i'}-q_{i,i'-1}+q_{i-1,i'-1}],$$

quam simul cum k''' evanescere statuimus, eo casu finita evadat aut adeo in infinitum abeat. Qua de re ut certiores fiamus, quaerendum est, quinam sit casu quo $1<n<2$ ordo infiniti, in quod $p_{i,i'}$ abit, simul atque $k'''=l-2l'-2l''$ infinite parva fit.

Rursus designante w infinite magnum, sit $k'''=l-2l'-2l''=\frac{1}{w^2}$, sit porro rursus $4l'=m^2$, $4l''=m'^2$, $\varphi=2\psi$, $\varphi'=2\psi'$, erit

$$p_{i,i'}=\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2i\psi\cos 2i'\psi'\,d\psi\,d\psi'}{\left[\frac{1}{w^2}+m^2\cos^2\psi+m'^2\cos^2\psi'\right]^n}.$$

Rursus ponamus $\psi=\frac{\pi}{2}-\frac{x}{w}$, $\psi'=\frac{\pi}{2}-\frac{x'}{w}$, sequitur per ratiocinia eadem atque antecedentibus usi sumus, valorem ipsius $p_{i,i'}$ quantitate finita discrepare a valore integralis

$$(-1)^{i+i'}\frac{4}{\pi^2}\cdot w^{2n-2}\iint\frac{dx\,dx'}{[1+m^2x^2+m'^2x'^2]^n},$$

integrationibus extensis a $x=0$, $x'=0$ usque ad valores ipsorum x, x'

infinito pro quibus tamen $\frac{x}{w}$, $\frac{x'}{w}$ infinite parvum maneat. Statuto rursus $mx = r\cos\Phi$, $m'x' = r\sin\Phi$, expressio antecedens, a $\Phi = 0$, $r = 0$ usque ad $\Phi = \frac{\pi}{2}$, $r = r$ integrata, abit in hanc:

$$\frac{(-1)^{i+i'}}{mm'} \cdot \frac{4}{\pi^2} \cdot w^{2n-2} \iint \frac{r\,dr\,d\varphi}{[1+r^2]^n} = \frac{(-1)^{i+i'}}{mm'} \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{2-2n} \cdot \left(\frac{w^2}{1+r^2}\right)^{n-1},$$

quae expressio, per $k''' = l - 2l' - 2l'' = \frac{1}{w^2}$ multiplicata, si n inter 1 et 2, evanescit pro w infinito. Unde cum $p_{i,i'}$ ab expressione illa tantum quantitate finita differat, etiam $k'''p_{i,i'}$, si n inter 1 et 2, sive quod idem est, $k'''q_{i,i'}$, si n inter 0 et 1, simul cum w infinito sive k''' evanescente evanescit. Unde videmus, quoties $k''' = 0$, etiam si n inter 0 et 1, recte statui:

$$\begin{aligned}(n-i-i')p_{i,i'} - (n-1+i-i')p_{i-1,i'} - (n-1+i'-i)p_{i,i'-1} \\ +(n-2+i+i')p_{i-1,i'-1} = k'''n(q_{i,i'} - q_{i-1,i'} - q_{i,i'-1} + q_{i-1,i'-1}) = 0.\end{aligned}$$

Regiom. d. 9. Oct. 1835.

15.

Darstellung der Lehre vom Zuge; zur Einleitung in die analytische Geometrie.

(Von Hrn. Dr. *G. W. Müller*, Capitain in der Königl. Hannöverschen Artillerie-Brigade.)

1.

Eine Linie stellt sich als Zug dar, wenn ihre Ausdehnung im Raume als durch Fortführung eines Puncts beschrieben gedacht wird.

2.

Durch den Zug werden die beiden Endpuncte der beschriebenen Linie wesentlich von einander unterschieden. Der eine ist der Ort des Anfangspuncts, der andere aber der Ort des Endpuncts des Zuges. Der Zug selbst erscheint als Übergang aus dem Anfangspuncte zum Endpuncte.

3.

Zwei Züge setzen sich zu einem dritten, als Theile zu einer Summe, zusammen, wenn der Endpunct des einen den Anfangspunct des andern abgiebt. Unter AB sei hier der Zug verstanden, der A zum Anfangspuncte, B zum Endpuncte hat; unter ABC der aus den beiden Theilen AC, BC sich zusammensetzende ganze Zug AC u. s. f.

4.

Die bei der Beschreibung der Linie durch den Punct in Anwendung kommende eigenthümliche Form der Fortführung, die den Übergang aus der Vorstellung des Puncts in die der Linie vermittelt, wird durch den geometrischen Grundbegriff der Richtung aufgefafst. Man kann sagen, die Richtung sei ein fortführender Punct. Die Richtung giebt in ihrer Vorstellung zugleich die Lage der Seite an, nach welcher hinaus die Fortführung des beschreibenden Puncts in seinem Orte beginnen soll; und da der geradlinige Zug ebenfalls den beschreibenden Punct nach einer bestimmten Seite aus seinem Orte fortführt, so dient ein in beliebiger Länge beschriebener geradliniger Zug als allgemeines Mittel zur Andeutung einer bestimmten, seinem Anfangspuncte beizulegenden, Richtung. Der Endpunct eines solchen Richtungszeigers pflegt in der Figur als Pfeilspitze

angegeben zu werden. Hier soll die Bezeichnung A' den Punct A als Anfangspunct einer Richtungs-Angabe unterscheiden, so daſs $\acute{A}B$ die durch den geradlinigen Zug von A nach B festgelegte Richtung in A bedeutet. Unter parallelen Richtungen sollen im Nachfolgenden solche verstanden werden, die in parallelen geraden Linien, von der schneidenden Linie aus nach einerlei Seite fortführen.

5.

Sobald Lage und Gestaltung der Linie gegeben sind, in welcher ein Zug zur Ausführung kommen soll, so erscheint diese als die vorgeschriebene Bahn für die Fortführung des beschreibenden Punctes. Es soll dann der Abschnitt der Bahnlinie, der zwischen dem Anfangs- und Endpuncte des Zuges liegt, in sofern er selbst als Zug aufgefaſst wird, als die Grundgröſse des Zuges angesehen werden. Es giebt aber in jeder Linie für die einfache Fortführung des beschreibenden Punctes längs einem Abschnitte AB der Linie zwei Beschreibungsformen, indem sowohl A als B den Anfangspunct des Zuges abgeben kann. Diese beiden Beschreibungsformen durchfahren die Linie längs ihrer ganzen Ausdehnung und unterscheiden sich dadurch von einander, daſs sie die Folge der Orte umkehren, welche der beschreibende Punct in der Bahn nach und nach einnimmt. Wenn zu einem durch einfache Fortführung nach der einen Beschreibungsform gebildeten Zuge sich in derselben Bahnlinie ein zweiter, als hinzukommender Theil, mit der andern Beschreibungsform anfügt, so führt dieser offenbar den beschreibenden Punct, mit Umkehrung der Folge, durch dieselben Orte in der Bahn wieder zurück. Es stehen also diese beiden Beschreibungsformen für die Hervorbringung der Grundgröſse in entgegengesetzter Beziehung zu einander, und wenn die eine als Vorwärtsführung des beschreibenden Punctes angesehen wird, so erscheint die andere als eine Rückwärtsführung. Man kann deshalb in jeder Bahnlinie, in Beziehung auf darzustellende Grundgröſsen, eine positive und eine negative Beschreibungsform unterscheiden.

6.

An jedem Zwischenpuncte in der Bahnlinie giebt es für die Fortführung des beschreibenden Punctes zwei der verschiedenen Beschreibungsform entsprechende Richtungen, die daher, in Übereinstimmung mit den

Beschreibungsformen, denen sie angehören, als positiv und negativ fortführende Richtung, oder kürzer, als **positive** und **negative Richtung** von einander zu unterscheiden sind.

Sobald in irgend einem Puncte A der Bahnlinie die positive und negative Benennung der Richtungen und damit die der Beschreibungsformen festgestellt worden ist, so ergiebt sich die an einem andern Puncte B in dieser Bahnlinie anzuwendende Benennung aus der Berücksichtigung, dafs die von B nach A führende Beschreibungsform die entgegengesetzte von der aus A nach B führenden ist.

7.

Mit Beziehung auf die Beschreibungsform erscheint nun jede Grundgröfse eines Zuges entweder als eine positive oder als eine negative Gröfse, je nachdem die in ihr vom Anfangspuncte aus führende Richtung die positive oder die negative ist.

Um diese Gröfse vollständig durch eine Zahl anzugeben, hat man daher die Zahl, welche nach der zum Grunde gelegten Längen-Einheit die Länge des Abschnitts zwischen Anfangs- und Endpunct der Grundgröfse darstellt, positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Richtung im Anfangspuncte positiv oder negativ ist.

8.

Setzt sich ein Zug in einer Bahnlinie aus Theilen zusammen, die theils der einen, theils der andern Beschreibungsform angehören, so hebt sich in der Fortführung des beschreibenden Punctes selbst, durch die den einzelnen Theilen entsprechende Vorwärts- oder Rückwärts-Führung, das in der Zusammenfassung enthaltene Entgegengesetzt-Gleiche eben so gegeneinander auf, wie es bei der Darstellung einer Summe von positiven und negativen Zahlen geschieht, wenn diese durch successive Summirung zur Ausführung kommt. Wenn also die Grundgröfse der einzelnen Züge durch die entsprechende positive oder negative Zahl ausgedrückt ist, so giebt die Summe dieser Zahlen die Grundgröfse des aus jenen einzelnen Zügen sich zusammensetzenden ganzen Zuges an. Da die Ordnung der Theile keinen Einflufs auf die Gröfse einer solchen Summe hat, so können jene einzelnen Züge in **beliebiger Folge** an einander gereihet werden, ohne dafs dadurch die Lage des letzten Endpuncts sich änderte, sobald nur derselbe Ort der Bahn für den ersten Anfangspunct beibehalten wird. Offenbar haben zwei zusammengesetzte Züge, die in

derselben Bahnlinie von einem gemeinschaftlichen Anfangspuncte A ausgehen und zu einem gemeinschaftlichen Endpuncte B hinführen, wie verschieden auch übrigens ihre Zusammensetzung beschaffen sein möge, eine und dieselbe Grundgröfse, nämlich die des einfachen Zuges, der den Abschnitt AB von A nach B beschreibt. Auch ist die Grundgröfse eines Zuges BA, der sich als Zurückführung eines andern AB darstellt, das Entgegengesetzte von der Grundgröfse dieses andern Zuges; die Grundgröfse aber eines Zuges BB, dessen Anfangs- und Endpuncte zusammenfallen, ist $= 0$.

Sobald von Zügen in einer Bahnlinie die Rede ist, soll hier unter Gröfse eines Zuges immer dessen Grundgröfse verstanden sein.

9.

Wenn für die Raumbeschreibung eine unbegrenzte gerade Linie als Grundlinie gegeben oder angenommen ist, so läfst sich die Fortführung eines beschreibenden Punctes im Raume mit einer Fortführung in der Grundlinie dadurch auf eine allgemeine Weise verknüpfen, dafs man den beschreibenden Punct im Raume, aus jeder Lage die er annimmt, rechtwinklig auf die Grundlinie projicirt denkt. Zur Unterscheidung soll hierbei der beschreibende Punct im Raume der ursprüngliche Punct und seine Projection in der Grundlinie der Projectionspunct genannt werden.

Mit der Fortführung des beschreibenden Punctes im Raume erscheint offenbar der ihm entsprechende Projectionspunct als beschreibender Punct in der Grundlinie. Denn so wie an jeder Stelle des Zuges der ursprüngliche Punct sich als Endpunct des schon beschriebenen Theils und als Anfangspunct des noch hinzukommenden darstellt: so kann auch der Projectionspunct als Endpunct des beschriebenen und als Anfangspunct des hinzukommenden Theils eines Projections-Zuges angesehen werden. Auf diese Art verknüpft sich also mit der Bildung jedes ursprünglichen Zuges im Raume die Bildung eines entsprechenden Projections Zuges in der Grundlinie. Dabei geben offenbar Anfangspunct und Endpunct des ursprünglichen Zuges durch ihre Projicirung den Anfangspunct und Endpunct des Projections-Zuges. Hieraus folgt der wichtige Satz, dafs solche ursprünglichen Züge, die von einem gemeinschaftlichen Anfangspuncte ausgehen und zu einem gemeinschaftlichen Endpuncte hinführen, Projections-Züge von gleicher

Grund-Gröfse geben, wie verschieden auch übrigens jene ursprünglichen Züge im Raume gestaltet und zusammengesetzt sein mögen.

Die Kenntnifs der Lage des Anfangspuncts und des Endpuncts eines ursprünglichen Zuges reicht daher hin, um die Grundgröfse seines Projections-Zuges zu finden, und es entspricht diese der Projection des einfachen geradlinigen Zuges, der vom Anfangspuncte zum Endpuncte des ursprünglichen Zuges führt. Dafs für einen zusammengesetzten ursprünglichen Zug der entsprechende Projections-Zug sich als die Summe der Projectionen der einzelnen Theile darstellt, liegt in dem Obigen mit einbegriffen.

10.

Wenn derselbe ursprüngliche Zug auf verschiedene, aber unter einander parallele Grundlinien projicirt wird, so ist die Grundgröfse der Projectionszüge in allen gleich, wenn die parallelen Richtungen in den Grundlinien die gleichnamigen sind.

Denn die durch den ursprünglichen Punct rechtwinklig gegen eine von den Grundlinien gelegte Ebene liegt auch gegen deren Parallelen, mithin gegen sämmtliche Grundlinien rechtwinklig, schneidet also jede derselben in dem entsprechenden Projectionspuncte und stellt für alle die projicirende Ebene jedes in ihr liegenden Punctes dar. Da nun sämmtliche projicirenden Ebenen gegen dieselbe gerade Linie rechtwinklig sind, so sind sie unter einander parallel; und da auch die Projections-Grundlinien unter sich parallel sind, so sind deren Abschnitte zwischen den projicirenden Ebenen des ursprünglichen Anfangspuncts und des Endpuncts unter einander gleich. Es kommt also den verschiedenen Projectionszügen gleiche Länge zu: durch die gleichnamige Benennung der parallelen Richtungen wird aber auch noch die Richtung im Anfangspuncte, die den gleichen Abschnitten beizulegen ist, wenn sie als Projections-Züge aufgefafst werden, in allen entweder zugleich positiv oder zugleich negativ.

Aus der Auffassung der projicirenden Ebenen ergiebt sich noch, dafs schon solche ursprünglichen Züge, die von einer und derselben projicirenden Ebene ausgehen und zu einerlei projicirenden Ebene hinführen, Projectionen von gleicher Grundgröfse geben.

11.

Auf ähnliche Weise, wie die Linie sich als Übergang aus einem Puncte in den andern darstellt, kann der geradlinige Winkel als Übergang aus einer Richtung in die andere aufgefafst werden. Alsdann unterscheiden sich die beiden Schenkel des Winkels dadurch wesentlich von einander, dafs durch den einen die Anfangs-Richtung $\acute{A}B$, durch den andern die End-Richtung $\acute{A}C$ des Überganges angegeben wird, der in dem Orte des Scheitelpuncts A vor sich geht. Behält man in diesem Übergange die zur Richtungs-Andeutung ursprünglich angenommene Länge oder die ursprüngliche Länge des Richtungszeigers bei, so beschreibt dessen Endpunct B dabei einen Zug BC, der durch die Lage seines Anfangs- und Endpuncts die Anfangs- und End-Richtung und durch jeden Zwischenpunct eine zwischenliegende Richtung des Überganges $\acute{A}BC$ angiebt. Auf diese Art läfst sich der in dem Scheitelpuncte eines Winkels vor sich gehende Übergang aus der Anfangs-Richtung in die End-Richtung ebenfalls durch Darstellung eines Zuges vermitteln. Man darf jedoch dabei nicht übersehen, dafs der beschreibende Punct dieses, in der Oberfläche einer Kugel zur Ausführung kommenden, Zuges, stets als Endpunct eines Richtungszeigers gedacht wird, zu dem der Scheitelpunct oder Kugel-Mittelpunct der Anfangspunct ist, und dafs der eigentliche Ort des Überganges durch die Fläche angegeben wird, die der Richtungszeiger im Übergehen durchfährt und beschreibt.

Als Richtungs-Übergang in einerlei Scheitelpunct setzen sich zwei Winkel $\acute{A}BC$ und $\acute{A}BD$ zu einem dritten $\acute{A}BD$, als Theile zu einem Ganzen zusammen, wenn die End-Richtung $\acute{A}C$ des ersten Theils die Anfangs-Richtung für den hinzukommenden zweiten Theil abgiebt. Es stellen dann Anfangs-Richtung $\acute{A}B$ des ersten Theils und End-Richtung $\acute{A}D$ des zweiten Theils die Anfangs- und End-Richtung des ganzen Winkels $\acute{A}BD$ dar.

12.

Wenn, wie hier vorausgesetzt werden soll, eine durch den Scheitelpunct des Winkels gelegte Ebene als Ort des Richtungs-Übergangs angenommen und vorgeschrieben wird, so erscheint diese Ebene als Grundbahn für den Übergang, in der sowohl die Anfangs- und End-Richtung, als die Zwischen-Richtungen liegen sollen. Es ergiebt sich dann die

Ausführung des Übergangs als eine Kreisbeschreibung um den Scheitelpunct. Die zur Richtungs-Angabe gleich lang gewählte gerade Linie, der Richtungszeiger, erscheint dabei als Drehungs-Halbmesser, und die im Scheitelpuncte die Winkel-Ebene senkrecht durchschneidende gerade Linie als Drehungs-Axe. Der Bogen des sich mit dem Richtungs-Übergange beschreibenden Kreis-Ausschnittes legt durch seinen Anfangs- und End-Punct die Anfangs-und End-Richtung, durch jeden Zwischenpunct aber eine zwischenliegende Richtung fest. Nun giebt es auch in der Beschreibung eines Kreis-Ausschnittes zwei Beschreibungsformen, indem sowohl der eine als der andere Endpunct seines Bogens zum Anfangspuncte des Bogenzuges gewählt werden kann, oder, auf andere Weise ausgedrückt, indem sowohl von dem einen als von dem andern begrenzenden Halbmesser die Drehung ausgehen kann, die durch die zwischenliegenden Richtungen hindurch führt. Beide Beschreibungsformen durchfahren den ganzen Umkreis und erscheinen, wenn einer Drehung, die nach der einen Form ausgeführt worden ist, eine Drehung nach der andern Form als Theil angefügt wird, als Entgegensetzung, so dafs, wenn die eine als Vorwärtsdrehung angesehen wird, die andere sich als Rückwärtsdrehung darstellt. Man kann deshalb auch diese Beschreibungsformen als positive und negative Form unterscheiden. Die Grundgröfse eines ebenen Richtungs-Überganges, die durch einfache Drehung aus der Anfangs-Richtung in die End-Richtung überführt, wird also mit Berücksichtigung der Beschreibungsform sich ebenfalls entweder als eine positive oder als eine negative Gröfse darstellen. Demnach wird die Gröfse eines ebenen Winkels in sich selbst positiv oder negativ sein, je nachdem die einfache Drehung, die aus seiner Anfangs-Richtung zur End-Richtung führt, positiv oder negativ ist; und hat man darnach die Zahl, welche die Gröfse des Winkels in Theilen der angenommenen Winkel-Einheit angiebt, positiv oder negativ zu nehmen.

Der ebene Richtungs-Übergang aus einer gegebenen Anfangs-Richtung in eine gegebene End-Richtung hat noch das Eigenthümliche, dafs er sowohl mit positiver als mit negativer Drehung zur Ausführung kommen kann. Die Bögen der beiden Drehungen ergänzen sich zum ganzen Umkreise. Man kann daher für jeden ebenen Richtungs-Übergang eine positive und eine negative Grundgröfse angeben. Die Winkelzahlen (worunter hier diejenigen Zahlen verstanden werden, die die Länge des

Bogens in Theilen des Halbmessers ausdrücken) der beiden Grundgröfsen geben, wenn man das Zeichen der negativen umkehrt, 2π zur Summe.

Für die Zusammensetzung eines ebenen Richtungs-Überganges, aus Theilen, die sowohl der einen als der anderen Beschreibungsform angehören, gelten dieselben Regeln, wie für die Zusammensetzung der Züge in einer Bahnlinie. Die Grundgröfse des ganzen Übergangs ist die Summe der Grundgröfsen der einzelnen Theile. Von derselben Anfangsrichtung ausgehend gelangt man daher zu derselben Endrichtung, in welcher Ordnung man auch die einzelnen Theile, aus denen der ganze Übergang sich zusammensetzt, auf einander folgen läfst. Auch hier ist die Grundgröfse des Übergangs aus der End-Richtung in die Anfangs-Richtung, wenn dieselben Zwischenrichtungen durchfahren werden, das Entgegengesetzte von der Grundgröfse des Übergangs aus der Anfangs- in die End-Richtung.

13.

Bei der Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Betrachtungen auf die Zusammensetzung geradliniger Züge im Raume bietet sich zunächst die Frage nach dem Zusammenhange dar, in welchem bei einem einfachen geradlinigen Zuge seine Grundgröfse mit der seines Projectionszuges steht. Da die Projicirung auf parallele Grundlinien mit gleichnamigen parallelen Richtungen Projectionen von gleicher Grundgröfse hervorbringt, so begreift die Nachweisung jenes Zusammenhanges für den Fall, wo der ursprüngliche Zug und der Projectionszug einen gemeinschaftlichen Anfangspunct haben, alle übrigen in sich, indem zu jeder gegebenen Projections-Grundlinie eine Parallele durch den Anfangspunct des ursprünglichen Zuges gelegt werden kann.

Der Winkel, der in einem solchen gemeinschaftlichen Anfangspuncte A, als Scheitelpuncte, aus der positiven Richtung der Grundlinie, als Anfangs-Richtung, in die positive Richtung des ursprünglichen Zuges, als End-Richtung, überführt, soll zur Unterscheidung Grundwinkel genannt werden. Alsdann sei u die Grundgröfse des ursprünglichen Zuges AB, p die Grundgröfse des entsprechenden Projectionszuges AB', f die Zahl, welche $f.u = p$ macht und deshalb bezeichnend der projicirende Factor genannt werden kann: so läfst sich zeigen, dafs dieser Factor für eine und dieselbe Gröfse des Grundwinkels eine fest bestimmte, unveränderliche Zahl ist. Denn wenn der ursprüngliche Zug AB

positiv ist, so wird die Verlängerung oder Verkürzung desselben nur eine entsprechende proportionale Veränderung in der Länge des Projectionszuges AB' nach sich ziehen, ohne dessen Richtungszeichen zu ändern, mithin den projicirenden Factor unverändert lassen. Nun giebt aber ein negativer ursprünglicher Zug offenbar eine Projection, die als Zug das Entgegengesetzte von der Projection des gleich langen positiven ursprünglichen Zuges ist. Bezeichnet also f' den unveränderlichen Werth des projicirenden Factors für positive ursprüngliche Züge, u' irgend einen positiven ursprünglichen Zug, f'' den projicirenden Factor des negativen ursprünglichen Zuges $(-u')$, so muſs $f''(-u') = -(f'.u')$ sein. Da aber $f''(-u') = -(f''.u')$ ist, so ist auch $f'' = f'$, mithin hat in einem gegebenen Winkel der projicirende Factor einen Werth, der weder durch die verschiedene Länge, noch durch das Zeichen des ursprünglichen Zuges sich ändert und ist derselbe daher eine beständige unveränderliche Zahl.

In der Trigonometrie wird dieser projicirende Factor, in Beziehung zu der Gröſse des Grundwinkels, dem er angehört, die Cosinus-Zahl des Winkels genannt. Mit Anwendung dieser Benennung läſst sich nunmehr folgende allgemeine Regel für die rechtwinklige Projicirung eines geradlinigen Zuges auf eine gegebene Grundlinie hin aussprechen. Um die Grundgröſse des Projectionszuges zu erhalten, hat man die Grundgröſse des ursprünglichen Zuges mit der Cosinus-Zahl des Winkels zu multipliciren, der aus der positiven Richtung der Projections-Grundlinie oder einer ihr parallelen Richtung, als Anfangs-Richtung, in die positive Richtung des ursprünglichen Zuges, als End-Richtung, überführt.

Offenbar kann man dabei auch den Winkel nehmen, der aus der Richtung, die zur positiven Richtung der Grundlinie parallel ist, in eine Richtung überführt, die zur positiven Richtung des ursprünglichen Zuges parallel ist, indem parallele Richtungen gleiche Winkel einschlieſsen.

14.

Um durch wirkliche Projicirung die Beziehung im Allgemeinen nachzuweisen, in welcher das Zeichen und der Zahlenwerth der Cosinus-Zahl zu der Gröſse des Winkels steht, wird man den ursprünglichen Zug positiv und von gleicher Länge ausführen dürfen, weil weder die negative Richtung, noch die Verschiedenheit der Länge des ursprünglichen Zuges den projicirenden Factor abändert. Wenn man dann die positive Rich-

tung der Projections-Grundlinie durch eine festliegende Anfangs-Richtung darstellt, und, von dieser ausgehend, die Gröſse des Grundwinkels die verschiedenen möglichen Werthe durchlaufen läſst, so erscheint in der dabei entstehenden Figur der ursprüngliche Zug als beschreibender Halbmesser eines Kreises, dessen Mittelpunct den gemeinschaftlichen Anfangspunct des ursprünglichen Zuges und des Projectionszuges abgiebt.

Mit Zuziehung der Eigenschaften des Kreises ergiebt dann die Projicirung ohne Schwierigkeit, daſs $\cos 0\pi = +1$, $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos \pi = -1$, $\cos \frac{3}{2}\pi = 0$, $\cos 2\pi = +1$ ist; daſs für die zwischenliegende Gröſse des Grundwinkels die Cosinuszahl einen zwischenliegenden Werth hat, der mit dem Wachsen des Winkels allmälig, aber nach eigenthümlichen Verhältnissen, aus dem vorhergehenden in den nachfolgenden Grenzwerth übergeht, und daſs überhaupt $\cos 2k\pi = +1$, $\cos(k+\frac{1}{2})\pi = 0$, $\cos(2k+1)\pi = -1$ ist, wenn k irgend eine positive oder negative ganze Zahl oder 0 bezeichnet.

Auch ergiebt sich, wenn man den Winkel als einen zweitheiligen Übergang zusammensetzt, dessen erster Theil ein rechter Winkel oder ein Vielfaches desselben ist, ohne Schwierigkeit, daſs
$\cos(k\pi + \Phi) = \cos(k\pi - \Phi)$ und $\cos((k+\frac{1}{2})\pi + \Phi) = -\cos((k+\frac{1}{2})\pi - \Phi)$ ist.

Läſst man die Gröſse des Grundwinkels, von derselben Anfangs-Richtung aus, durch negative Drehung entstehen, so giebt offenbar, für gleiche ursprüngliche Züge, ein negativer Grundwinkel denselben Projectionszug, wie der gleiche entgegengesetzte positive Grundwinkel. Hieraus folgt, daſs der Cosinus des negativen Winkels dieselbe Zahl ist, wie der Cosinus des entgegengesetzten positiven Winkels, daſs also $\cos(-\Phi) = \cos(\Phi)$ ist, Φ mag selbst positiv oder negativ sein, ferner, daſs eine Verwechselung der Anfangs- und End-Richtung, welche der Gröſse des Winkels das entgegengesetzte Zeichen giebt, die Cosinuszahl oder den projicirenden Factor nicht ändert.

15.

Offenbar kann der geradlinige Zug, welcher vom Endpuncte B' des Projectionszuges AB' zu dem Endpuncte B des ursprünglichen Zuges AB hinführt, als ein anderweitiger Projectionszug dieses ursprünglichen Zuges AB angesehen werden. Es ist dann $B'B$ ein Abschnitt einer zweiten Projections-Grundlinie, welche die erste in B' rechtwinklig durch-

schneidet: B' ist dabei die Projection des Anfangspunctes A, also Anfangspunct des Projectionszuges, und in B fällt der Endpunct des ursprünglichen Zuges AB mit seiner Projection, also mit dem Endpuncte des Projectionszuges, zusammen. Da nun Grundlinien mit paralleler positiver Richtung gleiche Projectionen geben, so kann man, zur Nachweisung der Beziehungen für diese anderweitige Projicirung, eine Grundlinie durch den Anfangspunct des ursprünglichen Zuges AB dem Projectionszuge $B'B$ parallel, also ebenfalls rechtwinklig auf die erste Projections-Grundlinie legen. Betrachtet man für diese Projicirung diejenige Richtung in der Grundlinie als die positive, in welche die positive Drehung durch Beschreibung eines rechten Winkels aus der Anfangs-Richtung überführt, die hier deshalb die **Normal-Richtung des Winkels** genannt werden soll: so stellt der sich dann ergebende projicirende Factor dieselbe Zahl dar, welche in der Trigonometrie die **Sinuszahl** des Grundwinkels genannt wird. Um Verwechselung zu verhüten, sollen die beiden Projicirungen als Grund- und Normal-Projicirung von einander unterschieden werden. Es ist also bei der Betrachtung eines Winkels als Grundwinkel, die End-Richtung des Winkels die positive Richtung für den ursprünglichen Zug; die Anfangs-Richtung des Winkels die positive Richtung für den Grund-Projectionszug, und die Normal-Richtung des Winkels die positive Richtung für den Normal-Projectionszug; ferner ist der projicirende Factor der Grund-Projection die Cosinuszahl des Winkels und der projicirende Factor der Normal-Projection die Sinuszahl des Winkels.

Da jeder projicirende Factor als die Cosinuszahl des Winkels angesehen werden kann, der aus der positiven Richtung der Projections-Grundlinie in die positive Richtung des ursprünglichen Zuges überführt, so ergiebt sich aus der Definition der Sinuszahl die allgemeine Beziehung, dafs die Sinuszahl des Winkels φ die Cosinuszahl des Winkels $\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ ist, indem $\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ der Winkel ist, der aus der Normal-Richtung des Winkels φ in seine End-Richtung überführt.

Mithin ist $\sin\varphi = \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ und, da entgegengesetzte Winkel einerlei Cosinuszahl haben, oder da $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$ ist, so ist auch $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$. Die Sinuszahl eines gegebenen Winkels ist

demnach ebenfalls eine unveränderliche Zahl. Verfolgt man das Ergebnifs der Normal-Projicirung auf gleiche Weise wie bei der Grund-Projicirung, so findet man dafs $\sin 0\pi = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = +1$, $\sin \pi = 0$, $\sin \frac{3}{2}\pi = -1$, $\sin 2\pi = 0$ ist; dafs für die zwischenliegenden Werthe der Winkelgröfse auch die Sinuszahl zwischenliegende Werthe hat, die nach eigenthümlichen Verhältnissen, mit dem Wachsen des Winkels, allmälig aus dem vorhergehenden in den nachfolgenden Grenzwerth übergehen; dafs überhaupt

$$\sin(2k + \tfrac{1}{2})\pi = +1, \quad \sin k\pi = 0, \quad \sin(2k - \tfrac{1}{2})\pi = -1 \quad \text{und}$$

$$\sin((k + \tfrac{1}{2})\pi + \varphi) = \sin((k + \tfrac{1}{2})\pi - \varphi), \quad \sin(k\pi + \varphi) = -\sin(k\pi - \varphi)$$

ist, wo wieder k jede beliebige positive oder negative ganze Zahl, auch 0, bezeichnet.

Ferner zeigt sich, dafs für gleiche ursprüngliche Züge der, von derselben Anfangs-Richtung aus negativ beschriebene, Winkel eine Normal-Projection giebt, deren Grundgröfse das Entgegengesetzte von derjenigen ist, welche die Projicirung bei dem gleich grofsen positiven Winkel hervorbringt. Gleiche entgegengesetzte Winkel haben also entgegengesetzt gleiche Sinuszahlen, oder es ist $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$, φ mag in sich selbst eine positive oder negative Winkelgröfse bezeichnen.

Eben jene Beziehungen ergeben sich aus der Zurückführung der Sinuszahl des Winkels φ auf die Cosinuszahl des Winkels $\left(-\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ oder des Winkels $\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$. Jedoch sind sie bei der Nachweisung durch wirkliche Projicirung leichter zu übersehen.

16.

Da die Zahl, welche den Inhalt des auf dem Abschnitte einer geraden Linie construirten Quadrats ausdrückt, durch das Quadrat der Zahl dargestellt werden kann, welche die Länge des Abschnitts positiv oder negativ angiebt, so drückt auch das Quadrat der Zahl, welche die Grundgröfse eines geradlinigen Zuges angiebt, den Inhalt des auf dem Abschnitte dieser Grundgröfse construirten Quadrats aus. Ist nun $AB = r$ ein ursprünglicher, in der End-Richtungslinie des Winkels φ, vom Scheitelpuncte A ausgehender Zug, B' die Grundprojection des Punctes B, also $AB' = r\cos\varphi$, $B'B = r\sin\varphi$, so bilden die drei Abschnitte AB, AB', $B'B$ ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse AB ist. Mit Anwendung des Pythagorischen Lehrsatzes, erhält man daher die Beziehung, dafs $r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = r^2$, also dafs $\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$ ist.

17.

Um ganz allgemein die Verknüpfung nachzuweisen, die bei der Zusammensetzung eines Winkels als Summe von zwei Theilen, die Cosinus- und Sinus-Zahl des ganzen Winkels aus den Cosinus- und Sinus-Zahlen seiner Theile hervorgehen läfst, sei der Winkel α der erste Theil, dem sich im Scheitelpuncte A der Winkel β als zweiter Theil anfügt, so dafs also die End-Richtung des Winkels α zugleich Anfangs-Richtung für den Winkel β ist, und der ganze Winkel $(\alpha+\beta)$ aus der Anfangs-Richtung des Winkels α in die End-Richtung des Winkels β überführt.

Es sei $AB=r$ ein willkührlicher, vom Scheitelpuncte A ausgehender geradliniger Zug in der End-Richtungslinie des ganzen Winkels $(\alpha+\beta)$, als auch in der des Winkels β, und B' die Projection seines Endpuncts B auf die Anfangs-Richtungslinie des Winkels β, so hat man, nach dem Vorhergehenden, für die geradlinigen Züge $A'B$, $B'B$ die Werthe $AB = r\cos\beta$, $B'B=r\sin\beta$.

Alsdann führen zwei verschiedene Züge von A nach B, der einfache geradlinige AB und der aus den beiden einfachen geradlinigen AB', $B'B$ sich zusammensetzende Zug $AB'B$. Die Projicirung auf dieselbe Grundlinie hin giebt, nach dem vorausgeschickten allgemeinen Satze (9.), für beide Züge Projectionen von gleicher Grundgröfse, und es setzt sich die Grundgröfse für die Projection des zusammengesetzten Zuges als Summe aus den Grundgröfsen der Projectionen der Theile zusammen.

Für die Projicirung auf die Grundlinie, deren positive Richtung durch die gemeinschaftliche Anfangs-Richtung des ganzen Winkels $(\alpha+\beta)$ und des Winkels α festgelegt wird, sei C die Projection des Punctes B und C' die Projection des Punctes B', so sind AC, AC', $C'C$ die Projectionen zu den ursprünglichen Zügen AB, AB', $B'B$ und man hat für die Grundgröfsen:

$$AC = AB.\cos(\alpha+\beta) = r.\cos(\alpha+\beta),$$
$$AC' = AB'.\cos\alpha \quad = r.\cos\beta.\cos\alpha,$$
$$C'C = B'B.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = r.\sin\beta.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),$$

also durch Gleichsetzung der Projectionen von AB und $AB'B$,

$$r.\cos(\alpha+\beta) = r.\cos\beta.\cos\alpha + r.\sin\beta.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) \text{ oder}$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta.\cos\alpha + \sin\beta.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right).$$

Für $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$ kann man $-\sin\alpha$ setzen, indem $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha$ ist; man erhält dann die allgemeine Beziehung

$$\text{I.}\qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos\beta.\cos\alpha-\sin\beta.\sin\alpha.$$

Für die Projicirung auf eine Grundlinie, deren positive Richtung durch die gemeinschaftliche Normal-Richtung des Winkels $(\alpha+\beta)$ und des Winkels α angegeben wird, sei D die Projection des Punctes B und D' die des Punctes B'. Dann giebt der einfache Zug AB die Projection AD, die sich als Normal-Projection für den Winkel $(\alpha+\beta)$ darstellt, so dafs $AD=r.\sin(\alpha+\beta)$ ist; ferner giebt der zusammengesetzte ursprüngliche Zug $AB'B$ einen aus zwei Theilen AD', $D'D$ sich zusammensetzenden Projectionszug $AD'D$. Die positive Richtung des Zuges AB' ist die End-Richtung des Winkels α, und $\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$ die Gröfse des Winkels, der aus der Normal-Richtung in jene End-Richtung überführt, also $AD'=AB'.\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=r.\cos\beta.\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, wofür auch, wegen $\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha$,

$$AD'=r.\cos\beta.\sin\alpha$$

gesetzt werden kann. Im Zuge $B'B$ ist die positive Richtung parallel zu der Normal-Richtung des Winkels β; mithin führt für ihn der Winkel $\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, der $=\alpha$ ist, aus der positiven Richtung der Grundlinie in die des ursprünglichen Zuges über, und man hat $D'D=B'B.\cos\alpha=r.\sin\beta.\cos\alpha$. Die Gleichsetzung der Grundgröfsen bei der Projection der Züge AB und $AB\ B$ giebt hier $r.\sin(\alpha+\beta)=r.\cos\beta.\sin\alpha+r.\sin\beta.\cos\alpha$, mithin die anderweitige allgemeine Beziehung

$$\text{II.}\qquad \sin(\alpha+\beta)=\cos\beta.\sin\alpha+\sin\beta.\cos\alpha.$$

Diese beiden der analytischen Trigonometrie zur Grundlage dienenden Beziehungen (I.) und (II.) gelten, der Natur dieser Ableitung nach, ohne alle Einschränkung, für jeden möglichen positiven oder negativen Werth, den man den Theilen beilegen will, aus denen sich der ganze Winkel zusammensetzt.

18.

Eine ähnliche Zusammenstellung eines einfachen und eines aus zwei Theilen zusammengesetzten Übergangs aus einer gemeinschaftlichen

Anfangs-Richtung in eine gemeinschaftliche End-Richtung, bietet die dreiseitige körperliche Ecke dar, wenn man den Endpunct als den Anfangspunct der Richtungen und die Kanten als die Richtungszeiger ansieht; nur mit dem Unterschiede, daſs dabei die einzelnen Winkel in verschiedenen Ebenen beschrieben werden.

Es sei E der Endpunct; von den drei Kanten EF, EG, EA sei EF als Anfangs-Richtung für den Übergang gewählt; der Winkel α führe aus EF in EG, der Winkel β aus EG in EA, und der Winkel γ aus EF in EA über; es sei ferner B der Neigungswinkel, der inwendig an der Kante EF aus der Ebene α in die Ebene γ, und C der Neigungswinkel, der inwendig an der Kante EG aus der Ebene α in die Ebene β überführt, auch bezeichne B die rechtwinklige Projection des Punctes A auf die Kante EF, C die rechtwinklige Projection des Punctes A auf die Kante EG, und D die rechtwinklige Projection des Punctes A auf die Ebene α. Da nach den Eigenschaften der Figur die geraden Linien DB, AB auf der Kante EF rechtwinklig sind, so ist der Punct B der Scheitelpunct des Neigungswinkels, und da dieser aus der Ebene α in die Ebene γ überführen soll, so ist im Puncte B von den beiden Richtungen der Linie BD diejenige die Anfangs-Richtung des Neigungswinkels B, die in Beziehung auf den Winkel α an der inneren Seite des Schenkels EF oder seiner Verlängerung liegt. Dann ist BA in jeder Lage der ursprüngliche Zug in der End-Richtungslinie des Winkels B, BD die Grundprojection, DA die Normalprojection, also $BD = BA.\cos B$, $DA = BA.\sin B$. Aus gleichen Gründen ist $CD = CA.\cos C$ und $DA = CA.\sin C$.

Zunächst giebt die Coïncidenz der Normalprojectionen in DA die allgemeine Beziehung

$$BA.\sin B = CA.\sin C$$

und da $BA = EA.\sin\gamma$, $CA = EA.\sin\beta$, also

$$EA.\sin\gamma.\sin B = EA.\sin\beta.\sin C$$

ist, so ergiebt sich daraus

$$1. \qquad \sin\gamma.\sin B = \sin\beta.\sin C.$$

Die Projicirung des einfachen Zuges EA und des zusammengesetzten Zuges $ECDA$ giebt gleiche Grundgröſsen. Wählt man die Anfangs-Richtung EF zur positiven Richtung der Projections-Grundlinie, so ist $EB = EA.\cos\gamma$ die Projection des einfachen Zuges EA. Die Projection des Zuges $ECDA$ setzt sich, als Summe, aus den Projectionen der Züge

EC, CD, DA zusammen. Der Winkel α führt aus der Anfangs-Richtung in die positive Richtung des Zuges EC über; folglich ist $EC.\cos\alpha$, oder, da $EC = EA.\cos\beta$ ist, $EA.\cos\beta.\cos\alpha$ die Projection von EC. Für den Zug CD ist die Anfangs-Richtung des Neigungswinkels C die positive Richtung. In diese führt der Winkel $\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ aus der Anfangs-Richtung AF über; folglich ist $CD.\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, oder, da $CD = CA.\cos C = EA.\sin\beta.\cos C$ ist, $EA.\sin\beta.\cos C.\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ die Projection des Zuges CD, wofür man auch, wegen $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha$, den Ausdruck $EA.\sin\gamma.\cos C.\sin\alpha$ setzen kann. Der Zug DA giebt eine Projection $= 0$, indem der Punct B zugleich für den Anfangspunct D und Endpunct A die Projection darstellt. Mithin ist $EA.\cos\beta.\cos\alpha + EA.\sin\beta.\cos C.\sin\alpha$ die Grundgröfse der Projection des Zuges $ECDA$. Die Gleichsetzung der Grundgröfsen giebt:

$$\text{II.} \qquad \cos\gamma = \cos\beta.\cos\alpha + \sin\beta.\sin\alpha.\cos C.$$

Wählt man die Normal-Richtung des Winkels α zur positiven Richtung der Projections-Grundlinie, so stellt der Zug BD die Grundgröfse der Projection des einfachen Zuges EA dar. Es ist nämlich dann BD eine Parallele zur Projections-Grundlinie, auch die positive Richtung des Zuges BD, als Anfangs-Richtung des Neigungswinkels B, der Normal-Richtung des Winkels α parallel, und B die Projection von E, so wie D von A. Man hat

$$CA = EA.\sin\beta,$$
$$DA = CA.\sin C = EA.\sin\beta.\sin C,$$
$$BA = \frac{DA}{\sin B} = \frac{EA.\sin\beta.\sin C}{\sin B} \text{ und}$$
$$BD = BA.\cos B = EA.\sin\beta.\sin C.\frac{\cos B}{\sin B}.$$

Der Zug EC giebt die Normalprojection $EC.\sin\alpha$ oder $EA.\cos\beta.\sin\alpha$. Der Winkel $\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, der $= (\alpha - \pi)$ ist, führt aus der Normal-Richtung des Winkels α in die Anfangs-Richtung des Neigungswinkels C über, welche für den Zug CD die positive Richtung angiebt; folglich ist $CD.\cos(\alpha - \pi)$, oder, wegen $\cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$, $-CD.\cos\alpha$, also $-EA.\sin\beta.\cos C.\cos\alpha$ die Projection von CD.

Für den Zug DA ist wiederum der projicirende Factor, als Cosinus eines rechten Winkels $=0$, und daher die Projection selbst $=0$; wie es auch die unmittelbare Projicirung ergiebt.

Mithin ist die Grundgröfse der Projection des zusammengesetzten Zuges $ECDA = EA(\cos\beta.\sin\alpha - \sin\beta.\cos C.\cos\alpha)$. Die Gleichsetzung der Grundgröfsen giebt

$$EA.\sin\beta.\sin C.\frac{\cos B}{\sin B} = EA(\cos\beta.\sin\alpha - \sin\beta.\cos C.\cos\alpha).$$

Man erhält hieraus, auf beiden Seiten durch $\sin\beta$ dividirend, die allgemeine Beziehung

$$\text{III.} \quad \sin C.\frac{\cos B}{\sin B} = \frac{\cos\beta}{\sin\beta}.\sin\alpha - \cos C.\cos\alpha$$

$$\text{oder } \cos C.\cos\alpha = \text{cotang}\,\beta.\sin\alpha - \text{cotang}\,B.\sin C.$$

Durch Zuziehung der Ergänzungs-Ecke, welche durch die drei auf die auswendigen Seitenflächen der Grund-Ecke im Eckpuncte errichteten Perpendikel gebildet wird, und an der die Seitenwinkel die Neigungswinkel der Grund-Ecke an der zwischenliegenden Kante zu zwei rechten Winkeln ergänzen, so wie umgekehrt, die Seitenwinkel der Grund-Ecke die Neigungswinkel der Ergänzungs-Ecke zu zwei rechten Winkeln ergänzen, so dafs, durch α', β', γ', A', B', C' die Winkel an der Ergänzungs-Ecke und durch A den dritten Neigungswinkel an der oben gebrauchten Grund-Ecke bezeichnend, $(\alpha' + A) = \pi$, $(\beta' + B) = \pi$, $(\gamma' + C) = \pi$, $(\alpha + A') = \pi$, $(\beta + B') = \pi$, $(\gamma + C') = \pi$ ist, erhält man aus der Beziehung (II.), nach welcher

$$\cos\gamma' = \cos\beta'.\cos\alpha' + \sin\beta'.\sin\alpha'.\cos C'$$

ist, den Ausdruck

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - B).\cos(\pi - A) + \sin(\pi - B).\sin(\pi - A).\cos(\pi - \gamma),$$

also, da $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ ist,

$$\text{IV.} \quad \cos C = -\cos B.\cos A + \sin B.\sin A.\cos\gamma.$$

Die unter (I.), (II.), (III.), (IV.) angegebenen und für alle möglichen Werthe der Winkel gültigen Beziehungen stellen bekanntlich die 4 Hauptgleichungen der sphärischen Trigonometrie dar.

19.

Der Nutzen der Lehre vom Zuge für klare und allgemeine Auffassung der analytischen Behandlung tritt besonders bei der Anwendung auf Coordinaten-Beziehungen hervor. Das Eigenthümliche dieser Anwen-

dung besteht darin, die Coordinaten eines Punctes nicht als die einzelnen Theile der Figur, zu welcher sie sich zusammenstellen lassen, sondern als die Bestandtheile in der Zusammensetzung eines Zuges aufzufassen, der von dem Anfangspuncte des Coordinatensystems ausgeht, und zu dem festzulegenden Puncte hinführt, für dessen Bildung das System ein gemeinschaftliches Gesetz aufstellt.

Da eine vollständige Betrachtung die Grenzen der gegenwärtigen Abhandlung überschreiten möchte, so wird diese sich darauf beschränken, nur einige Aufgaben zu behandeln, die als Beispiele der Anwendung dienen können.

Zur Feststellung der Benennungen sei zuvor bemerkt, dafs hiebei unter Grundrichtung im Anfangspuncte des Systems diejenige verstanden wird, welche mit dem Systeme als die Anfangs-Richtung der Winkelbeschreibung bei Polar-Coordinaten und als die positive Richtung der Abscissen-Axe für rechtwinklige Coordinaten festgelegt wird; unter Normalrichtung im Anfangspuncte des Systems diejenige Richtung in der Grund-Ebene des Systems, in welche die als positiv angenommene Drehung von der Grundrichtung aus durch Beschreibung eines rechten Winkels überführt, und unter Verticalrichtung im Anfangspuncte des Systems diejenige, die durch das System für die Fälle, wo die Construction aus der Grund-Ebene herausgeht, rechtwinklig gegen die beiden andern festgelegt wird und dadurch die Seite der Grund-Ebene, an der sie liegt, als die inwendige oder obere bezeichnet. Überhaupt soll jede von diesen drei Haupt-Richtungen als an der inwendigen Seite der Ebene der beiden andern liegend gedacht werden. Für rechtwinklige Coordinaten soll zugleich die Normalrichtung die positive Richtung der Ordinaten-Axe und die Verticalrichtung die positive Richtung der dritten Coordinaten-Axe angeben. Unter Grund- Normal- und Vertical-Richtung im Puncte A sollen diejenigen verstanden werden, die den gleichbenamten im Anfangspuncte des Systems parallel sind.

Bei der Lagenbeziehung zwischen zwei Puncten A und B in einer Grund-Ebene soll der geradlinige Zug AB die Distanz von B in A, und der Winkel, der aus der Grundrichtung in A in die positive Richtung der geraden Linie AB überführt, die Orientirung von B in A genannt werden. Je nachdem die Richtung, die von A nach B führt, die positive oder die negative Richtung der geraden Linie AB ist, wird man,

in Beziehung auf die durch die Orientirung festgelegte Richtung, B als vorwärts oder rückwärts von A liegend anzusehen haben und darnach die Distanz von B in A als eine positive oder negative Gröfse betrachten.

Die Orientirung und die Distanz von B in A geben, in ihrer Ebene, offenbar die Polar-Coordinaten des Puncts B für den Anfangspunct A ab.

In einem rechtwinkligen Coordinatensysteme, mit dem Anfangspuncte A, sind offenbar die Coordinaten des Punctes B die Projectionszüge, die man erhält, wenn die Distanz AB als ursprünglicher Zug betrachtet und auf die gleichbenamten Coordinaten-Axen, oder auf Grundlinien, die diesen Axen parallel sind, projicirt wird.

20.

Aufgabe. In einer Grund-Ebene aus den gegebenen rechtwinkligen Coordinaten (a, b) des Punctes B und (a', b') des Punctes C die Orientirung (φ) und die Distanz (r) von C in B (oder die relativen Polar-Coordinaten des Punctes C von B aus) zu finden.

Auflösung. Es sei A der Anfangspunct des Systems: dann werden der geradlinige Zug BC und der aus den geradlinigen Zügen BA, AC zusammengesetzte Zug BAC, da beide von B nach C führen, Projectionszüge von gleicher Grundgröfse geben.

Macht man die Abscissen-Axe zur Projections-Grundlinie, so führt der Winkel φ aus der Grundrichtung in B, also aus einer Richtung, die der positiven Richtung der Projections-Grundlinie parallel ist, in die positive Richtung des Zuges BC über; mithin ist $BC.\cos\varphi$ oder, $BC = r$ setzend, $r\cos\varphi$ die Projection von BC. Nun ist a, als Abscisse des Punctes B, die Projection des Zuges AB; mithin $-a$ die Projection des Zuges BA, und a', als Abscisse des Punctes C, die Projection des Zuges AC; folglich $-a+a'$ die Projection des Zuges BAC. Demnach ist

$$r\cos\varphi = -a + a'.$$

Macht man die Ordinaten-Axe zur Projections-Grundlinie, so erhält man auf ähnliche Art die Beziehung

$$r\sin\varphi = -b + b'.$$

Will man zuerst r berechnen, so giebt

$$r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = (-a+a')^2 + (-b+b')^2,$$

wegen

$$r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = r^2,$$

$$r = \sqrt{[(-a+a')^2+(-b+b')^2]},$$
$$\cos\varphi = \frac{-a+a'}{r}, \qquad \sin\varphi = \frac{-b+b'}{r}.$$

Man kann bei der Wurzel-Ausziehung für r das Zeichen $+$ oder $-$ wählen, je nachdem die durch die Orientirung φ sich festlegende positive Richtung der Linie BC von B nach C oder entgegengesetzt führen soll, oder, mit andern Worten: je nachdem die Orientirung C als vorwärts oder rückwärts von B liegend geben soll.

Will man dagegen zuerst φ bestimmen, so giebt

$$\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{-b+b'}{-a+a'},$$

wegen

$$\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tang\varphi,$$

$$\tang\varphi = \frac{-b+b'}{-a+a'}, \qquad r = \frac{-b+b'}{\sin\varphi} = \frac{-a+a'}{\cos\varphi}.$$

Unter den beiden, um 180^0 oder π verschiedenen, kleinsten Werthen des Winkels, den die Tangente giebt, kann man für φ sowohl den einen als den andern wählen, je nachdem man r positiv oder negativ haben will.

Aus der obigen Beziehung erhält man auch noch

$$a' = a + r\cos\varphi, \qquad b' = b + r\sin\varphi,$$

um dadurch die Auflösung der Aufgabe, aus den relativen Polar-Coordinaten des Punctes C von B aus, und den rechtwinkligen Coordinaten des Punctes B die rechtwinkligen Coordinaten des Punctes C zu finden.

21.

Aufgabe. Aus den Orientirungen des Punctes D in $B(\varphi')$ und in $C(\varphi'')$ und den relativen Polar-Coordinaten (φ, r) des Punctes C in B, die Distanzen des Punctes D in $B(r')$ und in $C(r'')$ zu finden.

Auflösung. Der geradlinige Zug BD giebt bei der Projicirung dieselbe Projections-Grundgröfse, wie der aus den beiden geradlinigen Zügen BC, CD zusammengesetzte Zug BCD, indem beide von B nach D führen.

Wählt man die Abscissen-Axe zur Projections-Grundlinie, so ist, $BC = r$, $BD = r$, $CD = r''$ setzend, $r\cos\varphi$ die Projection von BC, $r'\cos\varphi'$ die von BD und $r''\cos\varphi''$ die von CD; mithin ist

$$\text{I.} \qquad r'\cos\varphi' = r\cos\varphi + r''\cos\varphi''.$$

Wählt man die Ordinaten-Axe zur Projections-Grundlinie, so sind $r\sin\varphi$, $r'\sin\varphi'$, $r''\sin\varphi''$ die Projectionen der Züge BC, BD, DC. Man hat also

$$\text{II.}\qquad r'\sin\varphi' = r\sin\varphi + r''\sin\varphi''.$$

Für die Elimination von r'' erhält man, (I.) durch $\sin\varphi''$, (II.) durch $\sin\varphi'$ multiplicirend, als Differenz beider Producte:

$$r'(\cos\varphi'.\sin\varphi'' - \sin\varphi'.\cos\varphi'') = r(\cos\varphi.\sin\varphi'' - \sin\varphi.\cos\varphi'')\ \text{ oder}$$
$$r'(\sin\varphi'.\cos\varphi'' - \cos\varphi'.\sin\varphi'') = r(\sin\varphi.\cos\varphi'' - \cos\varphi.\sin\varphi''),$$

und daraus

$$r' = r.\frac{\sin(\varphi'' - \varphi)}{\sin(\varphi'' - \varphi')}\quad \text{oder}\quad r' = r.\frac{\sin(\varphi - \varphi'')}{\sin(\varphi' - \varphi'')},$$

welches, wegen

$$\sin(\varphi - \varphi'') = -\sin(\varphi'' - \varphi)\quad \text{und}\quad \sin(\varphi' - \varphi'') = -\sin(\varphi'' - \varphi'),$$

auf eins hinauskommt.

Durch Elimination von erhält man auf ähnliche Weise für die gleichbedeutenden Werthe

$$r'' = r.\frac{\sin(\varphi - \varphi')}{\sin(\varphi' - \varphi'')} = r.\frac{\sin(\varphi' - \varphi)}{\sin(\varphi'' - \varphi')}.$$

22.

Aufgabe. In einer Grund-Ebene aus des Punctes B rechtwinkligen Coordinaten (x, y) des Systems (I.) dessen rechtwinklige Coordinaten (x', y') des Systems (II.) abzuleiten, wenn beide Systeme einen gemeinschaftlichen Anfangspunct A haben.

Auflösung. Zuerst sei das System (II.) als von congruenter Form mit dem System (I.) vorausgesetzt, also die Drehung, die durch Beschreibung eines rechten Winkels und der Grundrichtung in die Normalrichtung überführt, in beiden Systemen übereinstimmend, und es sei φ der Winkel, der aus der Grundrichtung des Systems (I.) in die des Systems (II.) überführt. Es sei C die Projection des Punctes B auf die Abscissen-Axe (I.), also $AC = x$, und D die Projection des Punctes B auf die Ordinaten-Axe (I.), also $AD = y$, so ist auch $CB = AD = y$ indem CB und AD Projectionen von AB auf parallele Grundlinien sind.

Nun giebt die Projicirung des einfachen geradlinigen Zuges AB dieselbe Projections-Grundgröfse, wie die des zusammengesetzten Zuges ACB.

Für die Abscissen-Axe (II.), als Grundlinie, ist x' die Projection von AB, $x.\cos(-\varphi)$ die Projection von AC, und $y.\cos\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right)$ die

Projection von CB, wobei die Winkel so ausgedruckt sind, wie sie aus der positiven Richtung der Grundlinie in die des ursprünglichen Zuges der Construction nach überführen. Wegen $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ und $\cos\left(-\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\varphi$ ist auch $x.\cos\varphi$ die Projection von AC, und $y.\sin\varphi$ die Projection von CB.

Man hat demnach $x' = x.\cos\varphi + y.\sin\varphi$.

Für die Ordinaten-Axe (II.), als Grundlinie, giebt der einfache Zug AB die Ordinate y', als Projection; aus der positiven Richtung der Grundlinie führt der Winkel $\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$ in die des ursprünglichen Zuges AC, und der Winkel $(-\varphi)$ in eine der positiven Richtung des ursprünglichen Zuges CB parallele Richtung über; also ist $x.\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + y.\cos(-\varphi)$, oder, wegen $\cos\left(-\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, ist $-x.\sin\varphi + y.\cos\varphi$ die Projection des zusammengesetzten Zuges ACB.

Man hat demnach $y' = -x.\sin\varphi + y.\cos\varphi$.

Sobald das System (II.) zum Systeme (I.) symmetrisch ist, so dafs also die Normalrichtung in dem einen Systeme rechts von der Grundrichtung, im andern links von ihr liegt, wird man den Übergang wie vorhin auszuführen und darauf das Zeichen der Ordinate umzukehren haben; es ist demnach für diesen Fall, mit Beibehaltung der Winkel-Construction φ aus dem Systeme (I.),

$$x' = x.\cos\varphi + y.\sin\varphi, \qquad y' = x.\sin\varphi - y.\cos\varphi.$$

Da die Beschreibung des Winkels φ auch als eine Drehung um die supponirte Vertical-Axe anzusehen ist, so gilt die Auflösung dieser Aufgabe auch für den Fall, wo im Raume aus den rechtwinkligen Coordinaten (x, y, z) des Punctes B des Systems (I.), dessen rechtwinklige Coordinaten (x', y', z') des Systems (II.) zu finden sind, wenn beide Systeme nicht nur den Anfangspunct, sondern auch die Vertical-Axe gemeinschaftlich haben. Dann ist, neben den oben für x', y' gefundenen Ausdrücken, $z' = z$, es sei denn, dafs die Verticalrichtung im Systeme (II.) der des Systems (I.) entgegengesetzt genommen würde, so dafs, wegen der symmetrischen Form, dann $z' = -z$ ist.

23.

Aufgabe. Aus des Punctes B rechtwinkligen Coordinaten (x, y, z) des Systems (I.) dessen rechtwinklige Coordinaten (x', y', z') des Systems

(II.) zu finden, wenn beide Systeme einerlei Punct A zum Anfangspuncte haben.

Auflösung. Die gegenseitige Lage der Grund- Normal- und Vertical-Richtung des Systems stellt sich bei der Vergleichung der Systeme (I.) und (II.) entweder als congruente oder als symmetrische Form dar.

Zuerst sei die congruente Form vorausgesetzt. Dann wird die Winkelbeschreibung um den Anfangspunct A, die aus der Grundrichtung in die Normalrichtung durch einen rechten Winkel überführt, und auch als eine Drehung um die Vertical-Axe erscheint, von der Seite der Verticalrichtung oder der inwendigen Seite der Grund-Ebene betrachtet, in beiden Systemen zugleich entweder von der Linken zur Rechten oder von der Rechten zur Linken führen. Auf ähnliche Art wird man, bei jeder Drehung um eine andere Coordinaten-Axe, die eine Beschreibungsform als eine Drehung von der Linken zur Rechten. die andere als eine Drehung von der Rechten zur Linken auf eine bestimmte Weise benennen und unterscheiden können. Alle Zweideutigkeit der positiven und negativen Richtungsbezeichnung und Winkelbeschreibung fällt weg, wenn bei dem Übergange aus dem Systeme (I.) in das System (II.) durch successive Drehung um Coordinaten-Axen die Bedingung aufgestellt wird, daſs alle Drehungen derjenigen conform sein sollen, die im Systeme (I.) aus der Grundrichtung durch eine Viertel-Umdrehung in die Normalrichtung überführt, so daſs diese Drehung als eine positive betrachtet wird, und sich darnach zugleich für alle übrigen bestimmt, ob die Drehung von der Rechten zur Linken oder die entgegengesetzte als die positive Form gilt.

Aus der gegebenen gegenseitigen Lage der Systeme (I.) und (II.) wird die Lage der Durchschnittslinie der xy Ebene mit der $x'y'$ Ebene bekannt sein. Diese Durchschnittslinie soll als Axe eines Coordinaten-Systems betrachtet und die x'' Axe genannt werden. In der x'' Axe soll ferner diejenige Richtung als die positive betrachtet werden, für welche die Drehung um diese Axe, welche die Grund-Ebene aus der Lage des Systems (I.) in die Lage des Systems (II.) überführt, als conforme Drehung erscheint.

Es sei α der Winkel, der im Anfangspuncte A durch Drehung um die z Axe aus der positiven Richtung der x Axe in die der x'' Axe über-

führt. Man betrachte diese Drehung als eine Verlegung des Systems (I.) und bestimme nach der Auflösung der vorigen Aufgabe die neuentsprechenden Coordinaten x'', y'', z'' des Punctes B. Man erhält

$$x'' = x.\cos\alpha + y.\sin\alpha, \qquad y'' = -x.\sin\alpha + y.\cos\alpha, \qquad z'' = z.$$

Es sei β der Winkel, der durch Drehung um die x'' Axe die $x''y''$ Ebene aus der Lage der xy Ebene des Systems (I.), mit der sie zusammenfällt, in die Lage der Grund-Ebene des Systems (II.), mit Unterscheidung der inwendigen und auswendigen Seite, überführt, so wird auch der Winkel β aus der Verticalrichtung des Systems (I.) in die des Systems (II.) überführen. Man betrachte wiederum diese Drehung als eine Verlegung des Coordinatensystems, und x''', y''', z''' als die neuentsprechenden Coordinaten des Punctes B. Dann bekommt man

$$x''' = x'', \qquad y''' = y''.\cos\beta + x''.\sin\beta, \qquad z''' = -y''.\sin\beta + x''.\cos\beta.$$

Endlich sei γ der Winkel, der durch Drehung um die z''' Axe (die mit der z' Axe zusammenfällt) im Anfangspuncte A aus der positiven Richtung der x'' Axe in die der x' Axe überführt: so bringt die durch diese Drehung entstehende Verlegung der Coordinaten-Axen das System (II.) hervor; man hat also

$$x' = x'''.\cos\gamma + y'''.\sin\gamma, \qquad y' = -x'''.\sin\gamma + y'''.\cos\gamma, \qquad z' = z'''.$$

Die Zurückführung durch Substitution, giebt:

$$x' = x.(\cos\alpha.\cos\gamma - \sin\alpha.\sin\gamma.\cos\beta)$$
$$+ y(\sin\alpha.\cos\gamma + \cos\alpha.\sin\gamma.\cos\beta) + z.\sin\gamma.\sin\beta,$$
$$y' = x.(-\cos\alpha.\sin\gamma - \sin\alpha.\cos\gamma.\cos\beta)$$
$$+ y(-\sin\alpha.\sin\gamma + \cos\alpha.\cos\gamma.\cos\beta) + z.\cos\gamma.\sin\beta,$$
$$z' = x.\sin\alpha.\sin\beta - y.\cos\alpha.\sin\beta + z.\cos\beta.$$

Sobald im Systeme (II.) die Lage der Grund- Normal- und Vertical-Richtung symmetrisch zu der im Systeme (I.) ist, bleibt nach der Ausführung des vorhergehenden Übergangs noch das Zeichen im Ausdruck für z' zu verändern; wobei nicht zu übersehen ist, daſs die Winkel-Construction dem Systeme (I.) entspricht.

Auf einem andern Wege giebt die allgemeine Projections-Beziehung, nach welcher die Coordinaten x', y', z' die Projectionen des geradlinigen Zuges AB auf die Coordinaten-Axen sind, da auch der Coordinatenzug xyz von A nach B führt, wegen Gleichheit der Grundgröſse der Projection der von A nach B führenden Züge:

$$x' = x.\cos(x'x) + y.\cos(x'y) + z.\cos(x'z),$$
$$y' = x.\cos(y'x) + y.\cos(y'y) + z.\cos(y'z),$$
$$z' = x.\cos(z'x) + y.\cos(z'y) + z.\cos(z'z),$$

wo $\cos(x'x)$ den Cosinus des Winkels bezeichnen soll, der aus der positiven Richtung der x' Axe in die der x Axe überführt, u. s. f.

Da $\cos(x\,x') = \cos(x'\,x)$ ist, so kann man auch setzen

$$x' = x.\cos(x\,x') + y.\cos(y\,x') + z.\cos(z\,x'),$$
$$y' = x.\cos(x\,y') + y.\cos(y\,y') + z.\cos(z\,y'),$$
$$z' = x.\cos(x\,z') + y.\cos(y\,z') + z.\cos(z\,z').$$

Durch Gleichsetzung der identischen Coefficienten, erhält man folgende allgemein gültige Relationen:

1. Für zwei congruente Systeme:

$$\cos(x\,x') = \cos(x'\,x) = \cos\alpha.\cos\gamma - \sin\alpha.\sin\gamma.\cos\beta,$$
$$\cos(y\,x') = \cos(x'\,y) = \sin\alpha.\cos\gamma + \cos\alpha.\sin\gamma.\cos\beta,$$
$$\cos(z\,x') = \cos(x'\,z) = \sin\gamma.\sin\beta,$$
$$\cos(x\,y') = \cos(y'\,x) = -\cos\alpha.\sin\gamma - \sin\alpha.\cos\gamma.\cos\beta,$$
$$\cos(y\,y') = \cos(y'\,y) = -\sin\alpha.\sin\gamma + \cos\alpha.\cos\gamma.\cos\beta,$$
$$\cos(z\,y') = \cos(y'\,z) = \cos\gamma.\sin\beta,$$
$$\cos(x\,z') = \cos(z'\,x) = \sin\alpha.\sin\beta,$$
$$\cos(y\,z') = \cos(z'\,y) = -\cos\alpha.\sin\beta,$$
$$\cos(z\,z') = \cos(z'\,z) = \cos\beta.$$

2. Für zwei symmetrische Systeme:

Hiebei erhalten die drei letzteren Relationen das entgegengesetzte Zeichen, nämlich $\cos(x\,z') = -\sin\alpha.\sin\beta$, $\cos(y\,z') = +\cos\alpha.\sin\beta$, $\cos(z\,z') = -\cos\beta$; die übrigen verändern sich nicht, und es gehört dabei die Winkel-Construction dem Systeme (I.) an.

24.

Aufgabe. Im Raume die Gleichung einer Ebene für rechtwinklige Coordinaten zu finden.

Auflösung. Es sei AU das vom Anfangspuncte A des Coordinatensystems auf die Ebene herabgefällte Perpendikel, und in dieser geraden Linie diejenige Richtung als die positive angenommen, die von U aus an der inwendigen (oberen) Seite der Ebene liegt. Setzt man dann den Zug $AU = r$, so wird r positiv sein, wenn A an der auswendigen Seite (unter) der Ebene, negativ, wenn A an der inwendigen Seite (über) der

Ebene liegt. Da die Lage selbst als gegeben vorausgesetzt werden muſs, so können auch die Winkel als bekannt angesehen werden, welche aus der positiven Richtung des Zuges r in die Grund- Normal- und Vertical-Richtung des Coordinatensystems überführen, und hier durch α, β, γ bezeichnet sein mögen. Betrachtet man AU als Projections-Grundlinie, so ist U die gemeinschaftliche Projection aller Puncte in der Ebene.

Der Coordinatenzug xyz, der von A nach einem beliebigen Puncte S in der Ebene führt, giebt dann allemal den Zug AU zur Projection, während jeder Coordinatenzug, der von A nach einem nicht in der Ebene liegenden Puncte führt, einen Projectionszug von anderer Gröſse giebt.

Man erhält demnach, die Projection des Coordinatenzuges AS aus seinen drei Theilen zusammensetzend:

$$r = \cos\alpha . x + \cos\beta . y + \cos\gamma . z,$$

und dadurch eine Gleichung, welche nur zwischen den Coordinaten der Puncte statt findet, die in der Ebene liegen.

Wäre die Lage der Ebene nicht durch die Gröſsen r, α, β, γ, sondern durch die Coordinaten a, b, c des Punctes U gegeben, so hätte man $a = r\cos\alpha$, $b = r\cos\beta$, $c = r\cos\gamma$ und $a^2 + b^2 + c^2 = r^2$, folglich $r = \sqrt{[(a^2 + b^2 + c^2)]}$, $\cos\alpha = \frac{a}{r}$, $\cos\beta = \frac{b}{r}$, $\cos\gamma = \frac{c}{r}$, und daraus, substituirend;

$$r^2 = ax + by + cz,$$

als gesuchte Gleichung der Ebene.

25.

Aufgabe. Aus der für rechtwinklige Coordinaten gegebenen Gleichung einer ebenen Curve die Beziehungen der Lage und Gröſse für die Subtangente und Subnormale nachzuweisen.

Auflösung. Es sei A der Anfangspunct des Coordinatensystems, M ein Punct im Zuge der Curve, $AP = x$ die Abscisse, $PM = y$ die Ordinate des Punctes M. Es sei T der Durchschnitt der Abscissen-Axe mit der Tangente an M, und N der Durchschnitt der Abscissen-Axe mit der Normale des Punctes M. Die im Zuge der Curve als positiv angenommene Beschreibungsform wird in M zugleich die positive Richtung in der Berührungslinie angeben. Es sei Φ der Winkel, der in diese Richtung aus der Grundrichtung in M und in T überführt, so hat man für die Züge TM, TP, PM die Beziehungen $TP = TM . \cos\Phi$, $PM = TM . \sin\Phi$.

und daraus $TP = PM.\text{cotang}\,\Phi = y.\text{cotang}\,\Phi$; es ist aber, als Zug, $PT = -TP$, mithin ist die Subtangente des Punctes M oder der Zug $PT = -y.\text{cotang}\,\Phi$.

Da die Normale rechtwinklig gegen die Tangente liegt, so führt der Winkel $(\Phi + \frac{1}{2}\pi)$ aus der Grundrichtung in M und in N in eine von den Richtungen in der Normale über, mithin ist $NP = NM.\cos(\Phi + \frac{1}{2}\pi) = -NM.\sin\Phi$ und $PM = NM.\sin(\Phi + \frac{1}{2}\pi) = NM.\cos\Phi$, also $NP = -NM.\text{tang}\,\Phi = -y.\text{tang}\,\Phi$. Nun ist als Zug $PN = -NP$; folglich ist die Subnormale $PN = y.\text{tang}\,\Phi$.

Betrachtet man M als Anfangspunct des zum Bogen s hinzukommenden Theils, so erscheint ds, das Differenzial von s, als unendlich kleiner ursprünglicher Zug in der End-Richtungslinie des Grundwinkels Φ, dx als die Grundprojection und dy als die Normalprojection von ds. Man hat also $dx = ds.\cos\Phi$ und $dy = ds.\sin\Phi$. Demnach ist $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\Phi$, also die Subtangente $PT = -y.\frac{dx}{dy}$ und die Subnormale $PN = y.\frac{dy}{dx}$.

26.

Aufgabe. In einer Grund-Ebene ist die Lage von drei Puncten A, B, C durch ihre rechtwinkligen Coordinaten (a, b), (a', b'), (a'', b'') bekannt. Man sucht daraus und aus den in einem Standpuncte D in derselben Grund-Ebene gemessenen Winkeln zwischen den Objecten A, B, C die Lage dieses Standpunctes durch dessen rechtwinklige Coordinaten (x, y).

Auflösung. Es bezeichne α den Winkel, der aus der Richtung DA in die Richtung DB, β den Winkel, der aus DA in DC, und γ den Winkel, der aus DB in DC überführt: so sind zunächst die Grundgrößen dieser Winkel aus den zwischen den Objecten gemessenen Winkeln zu bestimmen, indem das Coordinatensystem durch die angenommene Lage der Grund- und Normal-Richtung die positive Drehung festlegt, und dadurch vorschreibt ob die durch α, β, γ bezeichneten Richtungs-Übergänge positive oder negative Winkel sind.

Als Hülfssatz für diese Auflösung wird als bekannt vorausgesetzt, daſs, wenn P, Q, R, S Puncte in einem Umkreise sind, die Drehung, welche in R aus der geraden Linie RP in die gerade Linie RQ überführt, auch in S aus der geraden Linie SP in die gerade Linie SQ überführen

wird. Diese Beziehung ist eine einfache Folgerung aus den Eigenschaften der Peripheriewinkel im Kreise, und es versteht sich, dafs dabei die Drehungen in übereinstimmendem Sinne vorzunehmen sind.

Die drei Puncte A, B, D legen, wenn sie nicht auf derselben geraden Linie liegen, welcher Fall hier ausgeschlossen ist, einen Umkreis fest, der durch sie hindurch geht. Führte dieser Umkreis auch durch den Punct C, so wäre die Aufgabe unbestimmt. Es sei also E der zweite und von C verschiedene Punct, in welchem die gerade Linie DC den Umkreis ABD, aufser in D, trifft.

Zur Bestimmung der Lage des Punctes E hat man sowohl in A als in B eine Orientirung des Punctes E. In D führt der Winkel γ aus der geraden Linie DB in die gerade Linie DC oder DE über; mithin führt eben dieser Winkel in A aus der geraden Linie AB in die gerade Linie AE über. Man erhält daher, die aus den rechtwinkligen Coordinaten sich ergebende Orientirung von B in A durch φ bezeichnend, $(\varphi+\gamma)$ als eine Orientirung von F in A. Ferner führt in D der Winkel β aus der geraden Linie DA in die gerade Linie DC oder DE über; mithin wird der Winkel β auch in B aus der geraden Linie BA in die gerade Linie BF überführen und es ist $(\varphi+\beta)$ eine Orientirung von E in B, indem die Orientirung φ, von B in A, zugleich eine Orientirung von A in B ist. Man erhält daher (21.), die relativen Polar-Coordinaten von B in A durch (φ, r) bezeichnend, $\left((\varphi+\gamma), \frac{r.\sin\beta}{\sin\alpha}\right)$ als die relativen Polar-Coordinaten von E in A; also, $(\varphi+\gamma)=u$, $\frac{r.\sin\beta}{\sin\alpha}=f$ setzend, für die rechtwinkligen Coordinaten $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ des Punctes E die Werthe

$$\mathfrak{A} = a+f\cos u, \qquad \mathfrak{B} = b+f\sin u.$$

Desgleichen erhält man für die relativen Polar-Coordinaten des Punctes E in B die Werthe $\left((\varphi+\beta), \frac{r.\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)$ und dadurch auch $\mathfrak{A}=a'+g.\cos v$, $\mathfrak{B}=b'+g.\sin v$, wenn $\varphi+\beta=v$ und $\frac{r.\sin\gamma}{\sin\alpha}=g$ gesetzt wird.

Aus den rechtwinkligen Coordinaten der Puncte E und C ergiebt sich eine Orientirung ψ von C in E, die auch als eine Orientirung von D in E gilt, da D in der geraden Linie CE, oder in deren Verlängerung liegt. Im Standpuncte D führt der Winkel $(-\beta)$ aus der Richtung DC in die Richtung DA, mithin aus der geraden Linie DE in die gerade Li-

nie DA über: also giebt $(\psi-\beta)$ eine Orientirung von A in D, und dadurch zugleich eine Orientirung von D in A. Ferner führt in D der Winkel $(-\gamma)$ aus der Richtung DC in die Richtung DB, mithin aus der geraden Linie DE in die gerade Linie DB über, es giebt also der Winkel $(\psi-\gamma)$ eine Orientirung von B in D und dadurch zugleich eine Orientirung von D in B. Aus den rechtwinkligen Coordinaten der Puncte A, B, E und den Orientirungen der Puncte D in A, B und E, ergeben sich auf sechs Wegen die Coordinaten des Punctes D. Man bekommt nämlich (21.) in A die Distanz von $D=\frac{f.\sin(\psi-u)}{\sin\beta}$ oder $=\frac{r.\sin(\psi-u)}{\sin\alpha}$, mithin, diese $=f'$ und die Orientirung von D in A oder $(\psi-\beta)=u'$ setzend, $x=a+f'\cos u'$, $y=b+f'\sin u'$; ferner die Distanz von D in $B=\frac{f.\sin(u'-\varphi)}{\sin\beta}$ oder $=\frac{r.\sin(u'-\varphi)}{\sin\alpha}$: mithin, diese $=f''$ und die Orientirung von D in B oder $\psi-\gamma=u''$ setzend, $x=a'+f''.\cos u''$, $y=b'+f''.\sin u''$; endlich die Distanz von D in $E=\frac{f.\sin(u'-u)}{\sin\beta}$ oder $=\frac{r.\sin(u'-u)}{\sin\alpha}$, und diese $=\varrho$ setzend und mit der Orientirung von D in E, die $=\psi$ ist, verknüpfend, $x=\mathfrak{A}+\varrho.\cos\psi$, $y=\mathfrak{B}+\varrho.\sin\psi$.

Sollte E mit D zusammenfallen, so wird $x=\mathfrak{A}$, $y=\mathfrak{B}$ sein. Dann ist $f''=0$, also $\sin(u'-u)=0$ und $u'-u$ entweder $=0$, oder ein Vielfaches von $\pm\pi$.

Die gegenwärtige Auflösung dürfte die vollständigste und allgemeinste sein, die sich über das der practischen Geometrie angehörende sogenannte Problem der drei Puncte geben läfst.

Schlufsbemerkung. Der Zweck dieser Abhandlung wird erreicht sind, wenn sie dazu beiträgt, auf die Allgemeinheit, den sichern methodischen Gang und die verhältnifsmäfsige Leichtigkeit der Auffassung aufmerksam zu machen, welche die Anwendung der Lehre vom Zuge auf die analytische Behandlung der Geometrie mit sich führt. Man darf von dieser behaupten, dafs sie eine scharf bestimmte, mit der Construction Hand in Hand gehende, analytische Darstellung geometrischer Beziehungen hervorbringt, und dafs sie in dieser Hinsicht mehr leistet, wie irgend eine andere bekannt gewordene Methode.

16.

Sur les intégrales Eulériennes.

(Par Mr. *G. Lejeune Dirichlet.*)

Les intégrales que *Legendre* a appelées Eulériennes de première et de seconde espèce, sont celles que renferment les équations

$$1.\quad \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1}\, dx = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\, dy}{(1+y)^{a+b}} = \left(\frac{b}{a}\right),$$

$$2.\quad \int_0^1 \left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1} dx = \int_0^\infty e^{-y} y^{a-1}\, dy = \Gamma(a),$$

dans lesquelles les constantes a et b, ou du moins leurs parties réelles doivent être supposées positives pour que les intégrales ne deviennent pas infinies. *Euler* a fait voir qu'il y a entre ces deux transcendantes cette relation très simple

$$3.\quad \left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Cette équation qui fait dépendre une intégrale de première espèce de trois intégrales de seconde espèce, renferme aussi une des principales propriétés de la fonction $\Gamma(a)$. En effet, si l'on y suppose $a+b=1$, on trouve, en ayant égard à l'équation évidente $\Gamma(1)=1$,

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}\, dy}{1+y}.$$

Or cette dernière intégrale a la valeur très simple $\frac{\pi}{\sin a\pi}$, comme *Euler* l'a trouvé par l'intégration d'une fraction rationelle et comme on l'a vérifié de différentes manières. On a donc définitivement

$$4.\quad \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Pour établir l'équation (3.) et les autres propriétés des intégrales Eulériennes, les géomètres ont employé des procédés assez différens. Mr. *Gauss* part de l'équation

$$5.\quad \Gamma(a) = \frac{1.2.3\ldots.k}{a(a+1)(a+2)\ldots.(a+k-1)} k^{a-1}, \qquad (k=\infty),$$

qui s'accorde avec la formule que *Laplace* a donnée pour exprimer la valeur approchee du produit $a(a+1)\ldots.(a+k-1)$, lorsqu'on y suppose k très grand. Après avoir démontré que l'expression (5.) converge vers une

limite déterminée lorsqu'on y fait croître indéfiniment l'entier positif k, Mr. *Gauss* pose cette limite comme définition de $\Gamma(a)$ et déduit de là au moyen des séries et des produits infinis tous les théorèmes relatifs aux transcendantes Eulériennes, y compris les équations (1.), (2.) et (3.). Cette marche très naturelle, lorsqu'on prend ce point de départ, ne l'est plus lorsqu'on définit ces transcendantes au moyen des équations (1.) et (2.), c'est-à-dire comme des intégrales. Il paraît alors plus simple et plus conforme à la définition de ces transcendantes de tout tirer du calcul intégral. L'équation (3.) qui comprend la formule (4.), ayant déjà été démontrée par Mrs. *Poisson* et *Jacobi* *), en transformant les intégrales qui y entrent, il reste pour rendre la théorie des intégrales Eulériennes plus uniforme, à prouver par l'intégration les autres formules qui s'y rapportent et particulièrement l'équation remarquable

$$6. \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na),$$

qui a été donnée par Mr. *Gauss* et *Legendre*, mais qu'on n'a pas encore démontrée que je sache sans recourir aux développemens infinis **). C'est l'objet que je vais remplir en peu de mots.

L'équation (2.) donne par un simple changement de variable

$$7. \quad \int_0^\infty e^{-sy}\,y^{a-1}\,dy = \frac{\Gamma(a)}{s^a},$$

où s est une constante positive.

Si l'on y suppose $a = 1$, et que l'on intègre par rapport à s entre les limites 1 et s, on aura la formule connue

$$8. \quad \int_0^\infty (e^{-y} - e^{-sy})\frac{dy}{y} = \log(s).$$

Si l'on différentie maintenant l'équation (2.) par rapport à a, après y avoir remplacé y par s, on aura

$$9. \quad \int_0^\infty e^{-s}\,s^{a-1}\log(s)\,ds = \Gamma'(a),$$

où l'on a fait pour abréger $\frac{d\Gamma(a)}{da} = \Gamma'(a)$.

---

*) Journal de l'Ecole polytech. 19ième cahier pag. 477. Journal de Mr. *Crelle*, tome XI. pag. 307.

**) Voyez sur ce point: Comment. Gottg. rec. vol. II., le Traité des fonctions elliptiques vol. II., les Exercices de Mr. *Cauchy* 19ième livraison et un memoire de Mr. *Crelle* tom. VII. pag. 375 de son Journal.

Substituant pour $\log(s)$ l'intégrale (8.), et intervertissant l'ordre des intégrations, il vient

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y}\int_0^\infty e^{-s} s^{a-1}\,ds - \int_0^\infty e^{-(1+y)s} s^{a-1}\,ds\right) = \Gamma'(a),$$

ou, si l'on met en vertu des équations (2.) et (7.), $\Gamma(a)$, $\frac{\Gamma(a)}{(1+y)^a}$ à la place des deux intégrales relatives à s,

$$10.\quad \Gamma(a)\int_0^\infty \frac{dy}{y}\left(e^{-y} - \frac{1}{(1+y)^a}\right) = \Gamma'(a),$$

équation qu'on peut mettre sous cette autre forme, en introduisant une nouvelle variable x telle que $x = \frac{1}{1+y}$,

$$11.\quad \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{x}} - x^a\right)\frac{dx}{x(1-x)} = \frac{\Gamma'(a)}{\Gamma(a)} = \frac{d\log\Gamma(a)}{da}.$$

Mettant a, $a+\frac{1}{n}$, $a+\frac{2}{n}$, ..., $a+\frac{n-1}{n}$, où n désigne un entier positif indépendant de a, à la place de a et faisant la somme de toutes ces équations, on aura

$$\int_0^1 \left[n e^{1-\frac{1}{x}} - x^a\left(1 + x^{\frac{1}{n}} + x^{\frac{2}{n}} + \dots + x^{\frac{n-1}{n}}\right)\right]\frac{dx}{x(1-x)} = S,$$

si l'on fait pour abréger,

$$S = \frac{d\log\Gamma(a)}{da} + \frac{d\log\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)}{da} + \dots + \frac{d\log\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{da},$$

ou ce qui revient au même

$$\int_0^1 \left(\frac{n e^{1-\frac{1}{x}}}{1-x} - \frac{x^a}{1-x^{\frac{1}{n}}}\right)\frac{dx}{x} = S.$$

Remplaçant x par x^n, cette équation deviendra

$$n\int_0^1 \left(\frac{n e^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x^n} - \frac{x^{na}}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = S.$$

Si l'on retranche de cette équation l'équation (11.), après avoir multiplié celle-ci par n et y avoir remplacé a par na, on trouve, en remettant pour S sa valeur et en remarquant qu'on a $n\frac{\Gamma'(na)}{\Gamma(na)} = \frac{d\log\Gamma(na)}{da}$,

$$n\int_0^1 \left(\frac{n e^{1-\frac{1}{x^n}}}{1-x^n} - \frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{1-x}\right)\frac{dx}{x} = \frac{d}{da}\log\left(\frac{\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\dots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(na)}\right)$$

Désignant par $\log(p)$ le premier membre de cette équation, qui ne dépend pas de a, intégrant par rapport à a et passant des logarithmes aux nombres, on aura

$$12. \quad \Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = qp^a\Gamma(na),$$

où q est la constante introduite par l'intégration. Pour déterminer les quantités p et q, l'une et l'autre indépendantes de a, on changera a en $a+\frac{1}{n}$. Divisant l'équation qui résulte de ce changement par l'équation (12.), on trouve

$$\frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = p^{\frac{1}{n}}\frac{\Gamma(na+1)}{\Gamma(na)},$$

d'où l'on conclut en vertu de l'équation connue $\Gamma(b+1) = b\Gamma(b)$,

$$p = n^{-n}.$$

L'équation (12.) devient ainsi

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = q\,n^{-na}\Gamma(na).$$

Pour déterminer q, on fera $a=\frac{1}{n}$, ce qui donne

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}q.$$

Si l'on écrit cette équation une seconde fois en renversant l'ordre des facteurs et si l'on forme ensuite le produit des deux équations, en évaluant le produit de deux facteurs de même rang au moyen de la formule (4.), on obtient

$$\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}}\ldots\frac{\pi}{\sin\frac{\overline{n-1}.\pi}{n}} = \frac{1}{n^2}q^2,$$

substituant pour le premier membre sa valeur connue, on conclut

$$q = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}.$$

On a donc définitivement

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}n^{\frac{1}{2}-na}\Gamma(na),$$

ce qui coïncide avec l'équation (6.).

L'équation (11.) diffère un peu par sa forme de l'équation connue

$$13. \quad \int_0^1\left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{x^{a-1}}{1-x}\right)dx = \frac{d\log\Gamma(a)}{da}.$$

Pour obtenir cette dernière, il faut transformer d'une manière différente les deux parties de l'intégrale (10.). En posant, comme plus haut, $x = \frac{1}{1+y}$ dans la seconde, il faut dans la première qui contient l'exponentielle e^{-y}, remplacer y par $\log\left(\frac{1}{x}\right)$. Mais ce procédé n'est pas exempt de difficulté, car on sait qu'il n'est pas permis en général d'employer des substitutions différentes dans deux parties d'une intégrale, lorsque ces parties sont séparément infinies. Pour se convaincre que dans le cas actuel le résultat auquel on arrive en opérant comme on vient de le dire, est néanmoins exact, on remarquera que, puisque la fonction sous le signe somme dans l'intégrale (10.) ne devient pas infinie pour $y=0$, la différence entre cette intégrale et l'expression

$$14. \quad \int_{\varepsilon}^{\infty}\left(e^{-y}-\frac{1}{(1+y)^a}\right)\frac{dy}{y},$$

deviendra moindre que toute quantité assignable, lorsqu'on fait décroître indéfiniment le nombre positif ε. En effectuant dans l'intégrale (14.) les deux substitutions indiquées, elle prendra cette forme

$$\int_0^{e^{-\varepsilon}}\frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}-\int_0^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\frac{x^{a-1}dx}{1-x},$$

ou, ce qui est la même chose en ajoutant et en retranchant en même temps l'intégrale $\int_{e^{-\varepsilon}}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}$,

$$15. \quad \int_0^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{x^{a-1}}{1-x}\right)dx-\int_{e^{-\varepsilon}}^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\frac{dx}{\log\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

La fonction sous le signe somme dans la dernière de ces deux intégrales qui est du genre de celles que Mr. *Cauchy* appelle singulières, croissant lorsque x passe de la limite inférieure à la limite supérieure, cette intégrale est évidemment moindre que la quantité

$$\left(\frac{1}{1+\varepsilon}-e^{-\varepsilon}\right)\frac{1}{\log(1+\varepsilon)},$$

qui devient infiniment petite en même temps que ε. Il suit de là et de ce qui précède, que la première des intégrales (15.) finira par différer de l'intégrale (10.) d'une quantité moindre que toute grandeur assignable.

D'un autre côté, comme la fonction $\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x}$ a une valeur finie pour $x = 1$, cette même intégrale (15.) converge aussi pour des valeurs décroissantes de s vers la limite

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\log\left(\frac{1}{x}\right)} - \frac{x^{a-1}}{1-x}\right) dx,$$

qui doit par conséquent coïncider avec l'intégrale (10.); ce qui montre l'accord des équations (10.) et (13.).

Je ferai remarquer encore que l'équation (3.), après y avoir remplacé $\left(\frac{b}{a}\right)$ par l'intégrale (1.), étant différentiée logarithmiquement par rapport à b, donne d'abord

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \log(x)\, dx = \left(\frac{\Gamma'(b)}{\Gamma(b)} - \frac{\Gamma'(a+b)}{\Gamma(a+b)}\right) \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1}\, dx,$$

et par suite, en ayant égard à l'équation (11.),

$$\int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} \log\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_0^1 x^{b-1} \frac{(1-x^a)}{1-x}\, dx . \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1}\, dx,$$

théorème connu qu'*Euler* a déduit de la considération d'un produit composé d'un nombre infini de facteurs.

En terminant je démontrerai une équation qui comprend la formule (3.). L'équation (7.) donne, en y mettant $c+z$ à la place de s,

$$\int_0^\infty e^{-(c+z)y} y^{a-1}\, dy = \frac{\Gamma(a)}{(c+z)^a}.$$

Multipliant celle-ci par $e^{-kz} z^{b-1}\, dz$, b et k désignant ainsi que a et c des constantes positives, et intégrant depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-cy} y^{a-1}\, dy \int_0^\infty e^{-(k+y)z} z^{b-1}\, dz = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}}{(c+z)^a}\, dz,$$

équation qui prend cette autre forme, si l'on y met pour l'intégrale relative à z dans le premier membre sa valeur donnée par la formule (7.),

$$\Gamma(b) \int_0^\infty \frac{e^{-cy} y^{a-1}}{(k+y)^b}\, dy = \Gamma(a) \int_0^\infty \frac{e^{-kz} z^{b-1}}{(c+z)^a}\, dz.$$

Cette relation entre deux transcendantes de même forme rentre dans l'équation (3.) lorsqu'on fait $c = 0$, $k = 1$. Il faut dans ce cas pour que les deux membres ne deviennent pas infinis, supposer $b > a$; mettant donc $a+b$ à la place de b, on aura précisément l'équation (3.).

17.

Summenrechnung für Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Band XII., No. 22., 23. und 24. Band XIII. No. 18. und 23. Band. XIV.)

---

§. 104.

Nachdem wir die Summenreihen, die durch einfache Functionen erzeugt werden, betrachtet und die ihnen zugehörigen Summen-Ausdrücke aufgesucht haben, gehen wir zur Betrachtung solcher Summenreihen über, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden.

Wie wir bei den Reihen, die durch einfache Functionen erzeugt wurden, Reihen unterschieden haben, die mit den fallenden figurirten und die mit steigenden figurirten Vorzahlen §. 73. — 89. und §. 90. — 103. verbunden sind, so können wir auch bei den Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden, diesen Unterschied beibehalten. Eben so werden wir auch hier zwischen Reihen, deren Glieder mit positiven, und solchen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, zu unterscheiden haben.

Die Art und Weise aber, wie wir die Summen-Ausdrücke für Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden, aufsuchen werden, fällt im Allgemeinen mit der, wie die einfachen aufgesucht wurden, zusammen, und ist nur darin von jener verschieden, daſs wir in den §§. 73., 90., 91. und 92. gegebenen formellen Darstellungen die einfachen Functionen als zusammengesetzt betrachten und dann an den zusammengesetzten Functionen diejenigen Geschäfte ausführen, welche die gegebenen Gleichungen angeben, und deren entwickelte Darstellung in der dritten und vierten Abhandlung, die von den Aufstufungen und Unterschieden der zusammengesetzten Functionen handeln, gefunden wurde.

Wir beschäftigen uns zuerst mit solchen Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen und mit den abnehmenden figurirten Zahlen verbunden

sind, legen zu dem Ende die erste Darstellung von (350.) zu Grunde und setzen in ihr statt der einfachen Function X die zusammengesetzte XY. Dadurch erhalten wir

$$X_1 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \dots + X_n Y_n = \Delta^{-1}(X_{n+1}.Y_{n+1}) - \Delta^{-1}(X_0 Y_0).$$

Dieser Gleichung entnehmen wir folgende Bedeutung. Eine Reihe, deren Glieder durch eine zusammengesetzte Function nach einem Gesetze, wie es den Gliedern auf der linken Seite des Gleichheitszeichens zum Grunde liegt, erzeugt werden, wird dadurch summirt, daſs der erste negative Unterschied von den Functionen, wie die Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angeben, genommen wird.

Den Ausdruck $\Delta^{-1}(X_{n+1}.Y_{n+1})$ können wir nun nach der ersten Gleichung (317.) darstellen, wenn dort $p = n+1$ und $\Delta^{-1}(X_0 Y_0)$ nach der ersten Gleichung von (316.) gesetzt wird. Dies führt zu folgender Gleichung:

$$\begin{aligned} \textbf{473.}\quad & X_0 Y_0 + X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \dots + X_n Y_n \\ = {} & X_{n+1}.\Delta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+3} - \dots \\ & - X_0 . \Delta^{-1} Y_0 + \Delta X_0 . \Delta^{-2} Y_1 - \Delta^2 X_0 . \Delta^{-3} Y_2 + \dots \end{aligned}$$

Legen wir die zweite Reihe in der Darstellung (350.) zum Grunde, und setzen statt der einfachen Function X die zusammengesetzte XY, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & (n+1) X_0 Y_0 + n X_1 Y_1 + (n-1) X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n \\ = {} & \Delta^{-2}(X_{n+2}.Y_{n+2}) - \frac{n+1}{1}\Delta^{-1}(X_0 Y_0) - \Delta^{-2}(X_1 Y_1). \end{aligned}$$

Führen wir nun aus (317.) die auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens angedeuteten Werthe ein, so entsteht

$$\begin{aligned} \textbf{474.}\quad & (n+1) X_0 Y_0 + n X_1 Y_1 + (n-1) X_2 Y_2 + \dots + X_n Y_n \\ = {} & X_{n+2}\Delta^{-2} Y_{n+2} - 2\Delta X_{n+2}.\Delta^{-3} X_{n+3} + 3\Delta^2 X_{n+2}.\Delta^{-4} X_{n+4} - \dots \\ & - \frac{n+1}{1}[X \Delta^{-1} Y - \Delta X \Delta^{-2} Y + \Delta^2 X \Delta^{-3} Y_2 - \dots] \\ & - X_1 \Delta^{-2} Y_1 + 2\Delta X_1 \Delta^{-3} Y_2 - 3\Delta^2 X_1 \Delta^{-3} Y_3 + \dots \end{aligned}$$

Fahren wir mit dieser Substitution fort, so erhalten wir ganz auf die nämliche Art allgemein aus (347.):

$$475.\quad \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_0 Y_0 + \frac{n^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_1 Y_1 + \frac{(n-1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_2 Y_2 + \ldots + X_n Y_n$$

$$= X_{n+r}.\Delta^{-r} Y_{n+r} - \frac{r}{1} \Delta X_{n+r} \Delta^{-r-1} Y_{n+r+1} + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{n+r}.\Delta^{-r-2} Y_{n+r+2} - \ldots$$

$$- \frac{n+1^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} [X \Delta^{-1} Y - \Delta X.\Delta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X.\Delta^{-3} Y_2 - \ldots]$$

$$- \frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}} [X_1 \Delta^{-2} Y_1 - 2 \Delta X_1.\Delta^{-3} Y_2 + 3 \Delta^2 X_1.\Delta^{-3} Y_3 - \ldots]$$

$$- \frac{(n+1)^{r-3|1}}{1^{r-3|1}} [X_2 \Delta^{-3} Y_2 - 3 \Delta X_2.\Delta^{-4} Y_3 + 6 \Delta^2 X_2.\Delta^{-5} Y_4 - \ldots]$$

. . . .

$$- X_{r-1} \Delta^{-r} Y_{r-1} + \frac{r}{1} \Delta X_{r-1}.\Delta^{-r-1} Y_r - \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{r-1}.\Delta^{-r-2} Y_{r+1}.$$

Die vorstehenden Gleichungen zeigen, wie der Summen-Ausdruck für zusammengesetzte Reihen aus den positiven und negativen Unterschieden der einfachen Functionen gefunden werden kann.

Wir bemerken an der vorliegenden Gleichung, dafs die Summen-Ausdrücke auf Reihen, die ins Unendliche fortlaufen, führen. Dem Anscheine nach sind sie daher unbrauchbar. Sie werden aber dennoch sehr gute Dienste thun, wenn wir berücksichtigen, dafs die Unterschiede der einfachen Functionen häufig auf 0 führen. Dieser Umstand verursacht dann, dafs die Reihen selbst abbrechen. Führen sie nicht auf 0, so erzeugen sie oft sehr convergirende Reihen, und dann reichen nur einige Anfangsglieder hin, um den Werth sehr genau zu erschöpfen.

§. 105.

Um eine Darstellung für zusammengesetzte Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, zu gewinnen, verfahren wir eben so, wie in dem vorhergehenden §. geschehen ist. Ob sich gleich hier die Reihen in solche von gerader und in solche von ungerader Glieder-Anzahl scheiden, so stellen wir dennoch die zusammengesetzten Reihen dieser Art nicht getrennt dar, sondern entnehmen allgemein aus den Darstellungen (351.) und (352.) folgendes, wenn man $X_0.Y_0$ statt X_0 setzt,

$$476. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \ldots \pm X_n Y_n = \pm \zeta^{-1}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \zeta^{-1}(X_0 Y_0), \\ (n+1) X_0 Y_0 - n X_1 Y_1 + (n-1) X_2 Y_2 - \ldots \pm X_n Y_n \\ = \pm \zeta^{-2}(X_{n+2} Y_{n+2}) + \frac{n+1}{1} \zeta^{-1}(X_0 Y_0) + \zeta^{-2}(X_1 Y_1), \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_0 Y_0 - \frac{n(n+1)}{1.2} X_1 Y_1 + \ldots \pm X_n Y_n \\ = \pm \zeta^{-3}(X_{n+3} Y_{n+3}) + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \zeta^{-1}(X_0 Y_0) + \frac{n+1}{1} \zeta^{-2}(X_1 Y_1) + \zeta^{-3}(X_2 Y_2), \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Man erkennt, daſs zur Darstellung der Summen-Ausdrücke für zusammengesetzte Reihen der vorliegenden Art die negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen nöthig sind. Diese finden wir in den Gleichungen (289.) und (290.) mitgetheilt, wo sie auf die positiven Unterschiede und negativen Aufstufungen der einfachen Functionen zurückgeführt sind. Benutzen wir diese Darstellungen, so erhalten wir folgende Resultate, wenn $p = n + 1$ gesetzt wird:

$$477. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \ldots \pm X_n Y_n \\ \quad = \pm [X_{n+1} \zeta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1} \zeta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1} \zeta^{-3} Y_{n+3} - \ldots] \\ \quad + X_0 \zeta^{-1} Y_0 - \Delta X_0 \zeta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X_0 \zeta^{-3} Y_2 - \ldots, \\ (n+1) X_0 Y_0 - n X_1 Y_1 + (n-1) X_2 Y_2 - \ldots \pm X_n Y_n \\ \quad = \pm [X_{n+2} \zeta^{-2} Y_{n+2} - 2 \Delta X_{n+2} \zeta^{-3} Y_{n+3} + 3 \Delta^2 X_{n+2} \zeta^{-4} Y_{n+4} - \ldots] \\ \quad + \frac{n+1}{1} X_0 \zeta^{-1} Y_0 - \Delta X_0 \zeta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X_0 \zeta^{-3} Y_2 - \ldots] \\ \quad + X_1 \zeta^{-2} Y_1 - 2 \Delta X_1 \zeta^{-3} Y_2 + 3 \Delta^2 X_1 \zeta^{-4} Y_3 - \ldots, \\ \text{u. s. w.} \end{array} \right.$$

Hieraus allgemein:

$$478. \quad \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_0 Y_0 - \frac{n^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_1 Y_1 + \frac{(n-1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_2 Y_2 - \ldots X_n Y_n$$

$$= \pm \left[X_{n+r} \zeta^{-r} Y_{n+r} - \frac{r}{1} \Delta X_{n+r} \zeta^{-r-1} Y_{n+r} + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{n+r} \zeta^{-r-2} Y_{n+r} - \ldots \right]$$

$$\frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} [X_0 \zeta^{-1} Y_0 - \Delta X_0 \zeta^{-2} Y_1 + \Delta^2 X_0 \zeta^{-3} Y_2 - \ldots]$$

$$\frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}} [X_1 \zeta^{-2} Y_1 - \Delta X_1 \zeta^{-3} Y_2 + 3 \Delta^2 X_1 \zeta^{-4} Y_3 - \ldots]$$

$$\frac{(n+1)^{r-3|1}}{1^{r-3|1}} [X_2 \zeta^{-3} Y_2 - 3 \Delta X_2 \zeta^{-4} Y_3 + 6 \Delta^2 X_2 \zeta^{-6} Y_4 - \ldots]$$

. . . .

$$X_{r-1} \zeta^{-r} Y_{r-1} - \frac{r}{1} \Delta X_{r-1} \zeta^{-r-1} Y_r + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{r-1} \zeta^{-r-2} Y_{r+1} - \ldots$$

Bei allen diesen Gleichungen gilt das positive Zeichen für eine ungerade, das negative für eine gerade Glieder-Anzahl.

Die nemliche Bemerkung, die über die Natur der unendlichen Reihen des Summen-Ausdruckes am Ende des vorigen §. gemacht wurde, gilt auch von den Reihen, welche die Summen-Ausdrücke in den Gleichungen dieses §. bilden.

§. 106.

Die negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen, welche die Summen-Ausdrücke der Reihen des vorigen §. bilden, wurden nach den Gleichungen (289.) und (290.) entwickelt.

Diese Entwickelung erzeugte Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Legt man aber die Entwickelungen, wie sie aus (291.) und (292.) gewonnen werden, zum Grunde, so gewinnt man Summen-Ausdrücke, deren Glieder mit gleichen Zeichen verbunden sind. Führt man die in (476.) angezeigten Geschäfte aus, so gewinnt man folgende Darstellungen,

$$479.\left\{\begin{aligned}
&X_0 Y_0 - X_1 Y_1 + X_2 Y_2 - \dots \pm X_n Y_n \\
&\qquad = \pm[X_n \zeta^{-1} Y_{n+1} + \Delta X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + \Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + \dots] \\
&\qquad\quad + X_{-1} \zeta^{-1} Y_0 + \Delta X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + \dots \\
&(n+1) X_0 Y_0 - n X_1 Y_1 + (n-1) X_2 Y_2 - \dots \pm X_n Y_n \\
&\qquad = \pm[X_n \zeta^{-2} Y_{n+2} + 2\Delta X_{n-1} \zeta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta X_{n-2} \zeta^{-4} Y_{n+2} + \dots] \\
&\qquad + \frac{n+1}{1}[X_{-1} \zeta^{-1} Y_0 + \Delta X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + \dots] \\
&\qquad + X_{-1} \zeta^{-2} Y_1 + 2\Delta X_{-2} \zeta^{-3} Y_1 + 3\Delta^2 X_{-3} \zeta^{-4} Y_1 + \dots \\
&\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_0 Y_0 - \frac{n(n+1)}{1.2} X_1 Y_1 + \dots \pm X_n Y_n \\
&\qquad = \pm\left[X_n \zeta^{-3} Y_{n+3} + \frac{2.3}{1.2}\Delta X_{n-1} \zeta^{-4} Y_{n+3} + \frac{3.4}{1.2}\Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-5} Y_{n+3} + \dots\right] \\
&+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}[X_{-1} \zeta^{-1} Y_0 + \Delta X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + \dots] \\
&+ \frac{n+1}{1}[X_{-1} \zeta^{-2} Y_1 + 2\Delta X_{-2} \zeta^{-3} Y_1 + 3\Delta^2 X_{-3} \zeta^{-4} Y_0 + \dots] \\
&\qquad X_{-1} \zeta^{-3} Y_2 + \frac{2.3}{1.2}\Delta X_{-2} \zeta^{-4} Y_2 + \frac{3.4}{1.2}\Delta^2 X_{-3} \zeta^{-5} Y_2 + \dots,
\end{aligned}\right.$$

und allgemein

480. $$\frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_0 Y_0 - \frac{n^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_1 Y_1 + \ldots \pm X_n Y_n$$

$$= \pm \left[X_n \zeta^{-r} Y_{n+r} + \frac{r}{1} \Delta X_{n-1} \zeta^{-r-1} Y_{n+r} + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-r-2} Y_{n+r} + \ldots \right]$$

$$+ \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} [X_{-1} \zeta^{-1} Y_0 + \Delta X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + \ldots]$$

$$+ \frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}} [X_{-1} \zeta^{-2} Y_1 + 2 \Delta X_{-2} \zeta^{-3} Y_1 + 3 \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-4} Y_1 + \ldots]$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$+ X_{-1} \zeta^{-r} Y_{r-1} + \frac{2^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \Delta X_{-2} \zeta^{-r-1} Y_{r-1} + \frac{3^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} \Delta^2 X_{-3} \zeta^{-r-2} Y_{r-1} + \ldots$$

Von den Zeichen des $(n+1)$ten Gliedes der Reihe von der ersten Reihe des Summen-Ausdruckes, und von der Natur der unendlichen Reihen im Summen-Ausdrucke gelten die nemlichen Bemerkungen, welche in den beiden vorhergehenden §§. gemacht wurden.

§. 107.

Bisher haben wir zusammengesetzte Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken betrachtet, worin die mit den Gliedern der Reihe verbundenen Vorzahlen in dem Verhältnisse fallen, wie die Stellenzahlen zunehmen. Nun wollen wir auch solche Reihen betrachten, worin die mit den Gliedern verbundenen Vorzahlen eben so steigen, wie die Stellenzahlen der Glieder, wozu sie gehören, und die ihnen zugehörigen Summen-Ausdrücke aufsuchen.

Auch hier legen wir zu dem Ende die Reihen und ihre Summen-Ausdrücke, die für einfache Functionen gelten §. 90. u. s. f. zum Grunde, und gehen von ihnen auf zusammengesetzte Reihen über. Zuerst betrachten wir Reihen, deren Glieder mit einerlei Zeichen, dann die, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind.

Setzen wir in den Gleichungen (440.) und (441.) statt der einfachen Function X die zusammengesetzte $X_0 Y_0$, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

$$X_0 Y_0 + 2 X_1 Y_1 + 3 X_2 Y_2 + \ldots + (n+1) X_n Y_n$$
$$= (n+1) \Delta^{-1}(X_{n+1} Y_{n+1}) - \Delta^{-2}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \Delta^{-2}(X_0 Y_0),$$

$$X_0 Y_0 + \frac{2.3}{1.2} X_1 Y_1 + \frac{3.4}{1.2} X_2 Y_2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n Y_n$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \Delta^{-1}(X_{n+1} Y_{n+1}) - \frac{n+1}{1} \Delta^{-2}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \Delta^{-3}(X_{n+1} Y_{n+1}) - \Delta^{-3}(X_0 Y_0),$$

u. s. w.

Zur Darstellung der Summen-Ausdrücke für die vorliegenden Reihen sind uns die negativen Unterschiede einer zweitheiligen Function nöthig. Wir gewinnen sie aus (316.) und (317.), wenn die gehörigen Stellenzahlen eingeführt werden. Hiernach entsteht:

$$481. \begin{cases} X_0 Y_0 + 2X_1 Y_1 + 3X_2 Y_2 + \ldots + (n+1) X_n Y_n \\ \quad = (n+1)\,[X_{n+1}.\Delta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+3} - \ldots] \\ \qquad - [X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-4} Y_{n+3} - \ldots] \\ \qquad + X.\Delta^{-2} Y - 2\Delta X.\Delta^{-3} Y_1 + 3\Delta^2 X.\Delta^{-4} Y_2 - \ldots \\ X_0 Y_0 + \frac{2.3}{1.2} X_1 Y_1 + \frac{3.4}{1.2} X_2 Y_2 + \ldots + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n Y_n \\ = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}[X_{n+1}.\Delta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+3} - \ldots] \\ \qquad - \frac{n+1}{1}[X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+3} - \ldots] \\ \qquad + X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+1} - 3\Delta X_{n+1}.\Delta^{-4} Y_{n+2} + 6\Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-5} Y_{n+3} - \ldots \\ \qquad - [X.\Delta^{-3} Y_0 - 3\Delta X.\Delta^{-4} Y_1 + 6\Delta^2 X.\Delta^{-5} Y_2 - \ldots], \end{cases}$$

und allgemein, aus (442.):

$$482. \quad X_0 Y_0 + \frac{r}{1} X_1 Y_1 + \frac{r(r+1)}{1.2} X_2 Y_2 + \ldots + \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_n Y_n$$

$$= \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}[X_{n+1}.\Delta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+3} - \ldots]$$

$$- \frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}}[X_{n+1}.\Delta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}\,\Delta^{-4} Y_{n+3} - \ldots]$$

$$+ \frac{(n+1)^{r-3|1}}{1^{r-3|1}}[X_{n+1}.\Delta^{-3} Y_{n+1} - 3\Delta X_{n+1}.\Delta^{-4} Y_{n+2} + 6\Delta^2 X_{n+1}.\Delta^{-5} Y_{n+3} - \ldots]$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(-)^r [X.\Delta^{-r} Y_1 - \frac{r}{1}\Delta X.\Delta^{-r-1} Y_1 + \frac{r(r+1)}{1.2}\Delta^2 X.\Delta^{-r-2} Y_2 - \ldots].$$

§. 108.

Wir suchen nun die Darstellung der Summen-Ausdrücke für solche zusammengesetzte Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, auf. Wir gehen dabei von den Gleichungen des §. 91. aus, Es unterscheiden sich zwei Fälle wie bekannt, und zwar für eine ungerade und eine gerade Glieder-Anzahl. Ziehen wir beide Fälle in eine Darstellung, so gewinnen wir aus (450.) und (451.), wenn die zusammengesetzte Function $X_0 Y_C$ statt der einfachen X_0 gesetzt wird:

483.
$$\begin{cases} X_0 Y_0 - 2X_1 Y_1 + 3X_2 Y_2 - \ldots \pm (n+1) X_n Y_n \\ = \pm\left[\frac{n+1}{1}\zeta^{-1}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \zeta^{-2}(X_{n+1} Y_{n+1})\right] + \zeta^{-2}(X_0 Y_0), \\ X_0 Y_0 - \frac{2.3}{1.2} X_1 Y_1 + \frac{3.4}{1.2} X_2 Y_2 - \ldots \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n Y_n \\ = \pm\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2}(X_{n+1} Y_{n+1}) + \zeta^{-3} X_{n+1} Y_{n+1}\right] + \zeta^{-3}(X_0 Y_0), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Darstellung der Summen-Ausdrücke der vorstehenden Reihe, erfordert die negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen. Wir entnehmen sie aus den Gleichungen (289.) und (290.) §. 60., und erhalten dadurch:

484.
$$\begin{cases} X_0 Y_0 - 2X_1 Y_1 + 3X_2 Y_2 - \ldots \pm (n+1) X_n Y_n \\ \quad = \pm \frac{n+1}{1}[X_{n+1}\zeta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+3} - \ldots] \\ \quad \pm [X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-4} Y_{n+3} - \ldots] \\ \quad + X_0\zeta^{-2} Y_0 - 2\Delta X_1\zeta^{-3} Y_1 + 3\Delta^2 X\zeta^{-4} Y_2 - \ldots \\ X_0 Y_0 - \frac{2.3}{1.2} X_1 Y_1 + \frac{3.4}{1.2} X_2 Y_2 - \ldots \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n Y_n \\ \quad = \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}[X_{n+1}\zeta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+2} - \ldots] \\ \quad \pm \frac{n+1}{1}[X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-4} Y_{n+2} - \ldots] \\ \quad \pm [X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+1} - 3\Delta X_{n+1}\zeta^{-4} Y_{n+2} + 6\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-5} Y_{n+2} - \ldots] \\ \quad X\zeta^{-3} Y_0 - 3\Delta X_0\zeta^{-4} Y_1 + 6\Delta^2 X\zeta^{-5} Y_2 - \ldots, \end{cases}$$

und allgemein:

485.
$$\begin{aligned} & X_0 Y_0 - \frac{r}{1} X_1 Y_1 + \frac{r(r+1)}{1.2} X_2 Y_2 - \ldots \pm \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_n Y_n \\ = & \pm \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}}[X_{n+1}\zeta^{-1} Y_{n+1} - \Delta X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+2} + \Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+3} - \ldots] \\ & \pm \frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-1|1}}[X_{n+1}\zeta^{-2} Y_{n+1} - 2\Delta X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+2} + 3\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-4} Y_{n+3} - \ldots] \\ & \pm \frac{(n+1)^{r-3|1}}{1^{r-3|1}}[X_{n+1}\zeta^{-3} Y_{n+1} - 3\Delta X_{n+1}\zeta^{-4} Y_{n+2} + 6\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-5} Y_{n+3} - \ldots] \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \pm\left[X_{n+1}\zeta^{-r} Y_{n+1} - \frac{r}{1}\Delta X_{n+1}\zeta^{-r-1} Y_{n+2} + \frac{r(r+1)}{1.2}\Delta^2 X_{n+1}\zeta^{-r-2} Y_{n+3} - \ldots\right] \\ & +\left[X_0\zeta^{-r} Y_0 - \frac{r}{1}\Delta X\zeta^{-r-1} Y_1 + \frac{r(r+1)}{1.2}\Delta^2 X_0\zeta^{-r-2} Y_2 - \ldots\right]. \end{aligned}$$

§. 109.

Die Summen-Ausdrücke, die in dem vorhergehenden §. für zusammengesetzte Reihen mit abwechselnden Zeichen gefunden wurden, sind durch Reihen dargestellt, deren Glieder selbst mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Gehen wir aber bei der Darstellung der Reihen im Summen-Ausdrucke von den Gleichungen (291.) und (292.) §. 60., welche die negativen Aufstufungen der zusammengesetzten Functionen auf andere Weise darstellen, aus; so gewinnen wir Reihen, die mit einerlei Zeichen versehen sind. Die Gleichungen (483.) zeigen, wie die Darstellung der fraglichen Reihen gefunden werden kann. Führen wir die angedeuteten Geschäfte aus, so erhalten wir:

486.
$$\left\{\begin{aligned}
& X_0 Y_0 - 2X_1 Y_1 + 3X_2 Y_2 - \ldots \pm (n+1) X_n Y_n \\
& \quad = \pm (n+1)[X_n \zeta^{-1} Y_{n+1} + \Delta X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + \Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \qquad \pm [X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + 2\Delta X_{n-1} \zeta^{-3} Y_{n+1} + 3\Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-4} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \qquad\quad X_{-2} \zeta^{-2} Y_0 + 2\Delta X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + 3\Delta^2 X_{-4} \zeta^{-4} Y_0 + \ldots \\
& X_0 Y_0 - \frac{2.3}{1.2} X_1 Y_1 + \frac{3.4}{1.2} X_2 Y_2 - \ldots \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n Y_n \\
& = \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}[X_n \zeta^{-1} Y_{n+1} + \Delta X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + \Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \quad \pm \frac{n+1}{1}[X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + 2\Delta X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + 3\Delta^2 X_{n-3} \zeta^{-4} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \qquad \pm [X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + 3\Delta X_{n-3} \zeta^{-4} Y_{n+1} + 6\Delta^2 X_{n-4} \zeta^{-5} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \qquad\quad X_{-3} \zeta^{-3} Y_0 + 3\Delta X_{-4} \zeta^{-4} Y_0 + 6\Delta^2 X_{-5} \zeta^{-5} Y_0 + \ldots \\
& \text{u. s. w.}
\end{aligned}\right.$$

Hieraus allgemein:

487.
$$\begin{aligned}
& X_0 Y_0 - \frac{r}{1} X_1 Y_1 + \frac{r(r+1)}{1.2} X_2 Y_2 - \ldots \pm \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} X_n Y_n \\
& = \pm \frac{(n+1)^{r-1|1}}{1^{r-1|1}} [X_n \zeta^{-1} Y_{n+1} + \Delta X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + \Delta^2 X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \quad \pm \frac{(n+1)^{r-2|1}}{1^{r-2|1}} [X_{n-1} \zeta^{-2} Y_{n+1} + 2\Delta X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + 3\Delta^2 X_{n-3} \zeta^{-4} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \quad \pm \frac{(n+1)^{r-3|1}}{1^{r-3|1}} [X_{n-2} \zeta^{-3} Y_{n+1} + 3\Delta X_{n-3} \zeta^{-4} Y_{n+1} + 6\Delta^2 X_{n-4} \zeta^{-5} Y_{n+1} + \ldots] \\
& \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \pm \left[X_{n-r+1} \zeta^{-r} Y_{n+1} + \frac{r}{1} \Delta X_{n-r} \zeta^{-r-1} Y_{n+1} + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{n-r-1} \zeta^{-r-2} Y_{n+1} + \ldots\right] \\
& + X_{-r} \zeta^{-r} Y_0 + \frac{r}{1} \Delta X_{-r-1} \zeta^{-r-1} Y_0 + \frac{r(r+1)}{1.2} \Delta^2 X_{-r-2} \zeta^{-r-2} Y_0 + \ldots
\end{aligned}$$

Das positive Zeichen dieser Gleichungen gilt für eine ungerade Glieder-Anzahl, das negative für eine gerade. Die Reihen des Summen-Ausdruckes sind ihrer Form nach unendlich, brechen aber ab, wenn der Unterschied der Function X in 0 übergeht. Ist die eine Function X eine gebrochene, so führen zwar diese Reihen oft auf unendliche Darstellungen; sie convergiren aber in manchen Fällen so stark, dafs oft einige Anfangsglieder hinreichen, um ihren Werth hinlänglich genau darzustellen.

Die in den §§. 104. bis 109. gefundenen Formeln sind ganz allgemein, und gelten von zusammengesetzten Reihen ohne Rücksicht auf irgend eine specielle Function. Die Darstellung der Summen-Ausdrücke für zusammengesetzte Reihen, die dem genannten Bildungsgesetz unterliegen, wird also darin bestehen, dafs wir die allgemeinen Gleichungen auf specielle Fälle anwenden. Die Functionen X und Y sind von einander ganz unabhängig. Von der schicklichen Zusammenstellung der speciellen Fälle wird die Auffindung der Summen-Ausdrücke bedingt sein, und eine zweckmäfsige Combination wird die Darstellung sehr erleichtern.

Wie dies geschehen kann, soll im Folgenden gezeigt werden. Daher wenden wir uns zu Anwendungen.

§. 110.

Bei der Darstellung der zusammengesetzten Reihen, mit ihren Summen-Ausdrücken, ist es weder möglich noch belohnend, alle einzelnen Fälle anzugeben. Daher heben wir von den vielen durch Combination möglichen Fällen diejenigen, die uns die merkwürdigsten zu sein scheinen heraus. Geht man von der einfachsten Gestalt einer zusammengesetzten Reihe aus, so hat man:

$$X_0 Y_0 \pm X_1 Y_1 + X_2 Y_2 \pm X_3 Y_3 + \ldots \pm X_n Y_n.$$

In dieser Reihe kann man nun jede beliebige Function von x, statt X und Y setzen, und sie dann mit einander verbinden. Versteht man zuerst unter X eine Potenzial-Gröfse, so kann man dann unter Y eine Exponential- oder Kreisfunction verstehen, und umgekehrt, und dann gewinnt man z. B. Reihen von folgender Gestalt,

$$488.\quad \begin{cases} x^p . a^x \pm (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} \pm \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}, \\ x^p . \sin x \pm (x+\Delta x)^p . \sin(x+\Delta x) + (x+2\Delta x)^p . \sin(x+2\Delta x) \pm \ldots \pm (x+n\Delta x)^p \sin(x+n\Delta x), \\ x^p . \cos x \pm (x+\Delta x)^p . \cos(x+\Delta x) + (x+2\Delta x)^p . \sin(x+2\Delta x) \pm \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . \cos(x+n\Delta x). \end{cases}$$

Verbindet man die Facultäten mit den genannten Functionen, so entsteht:

$$489. \begin{cases} x^{p|\Delta x}.a^x \pm (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x} \pm \ldots \\ \qquad \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}, \\ x^{p|\Delta x}.\sin x \pm (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.\sin(x+\Delta x) + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.\sin(x+2\Delta x) \pm \ldots \\ \qquad \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.\sin(x+n\Delta x), \\ x^{p|\Delta x}.\cos x \pm (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos(x+\Delta x) + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos(x+2\Delta x) \pm \ldots \\ \qquad \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos(x+n\Delta x). \end{cases}$$

Verbindet man die Facultäten mit Potenzen, so gewinnt man:

$$490. \begin{cases} x^{p|\Delta x}.x^p \pm (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.(x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.(x+2\Delta x)^p \pm \ldots \\ \qquad \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.(x+n\Delta x)^p, \\ \frac{x^{p|\Delta x}}{x^p} \pm \frac{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}{(x+\Delta x)^p} + \frac{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}{(x+2\Delta x)^p} \pm \ldots \pm \frac{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}{(x+n\Delta x)^p}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Darstellung der Summen-Ausdrücke für zusammengesetzte Reihen.

§. 111.

Wenn wir uns nun zur Darstellung der Summen-Ausdrücke für zusammengesetzte Reihen selbst wenden, so liegt es ganz in unserer Willköhr, was für Functionen wir in den bisher gegebenen allgemeinen, formellen Gleichungen statt X und Y substituiren.

Berücksichtigt man aber, daſs alle Reihen im Summen-Ausdrucke ihrer Natur nach unendlich sind, so ist zu bemerken, daſs die Wahl natürlich am zweckmäſsigsten so getroffen werden muſs, daſs die der Form nach unendlichen Reihen endlich abbrechen. Die Unterschiede mancher Functionen führen auf 0. Trifft man die Wahl der Functionen nun so, daſs die Unterschiede der gewählten Functionen auf endliche Reihen führen, so wird dies die zweckmäſsigste Wahl sein.

Wir suchen nun den Summen-Ausdruck für folgende zusammengesetzte Reihe:

$$x^p.a^x + (x+\Delta x)^p.a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x).a^{x+2\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^p.a^{x+n\Delta x},$$

deren Glieder aus den Gliedern einer Potenzen-Reihe und einer Exponentialgröſsen-Reihe zusammengesetzt sind.

Wir finden ihre Summe mit Hülfe der Gleichung (473.), wenn $X_0 = x^p$ und $Y = a^x$ gesetzt wird. Dadurch wird nämlich

$$x^p.a^x + (x+\Delta x)^p.a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p.a^{x+2\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^p.a^{x+n\Delta x}$$
$$= (x+(n+1)\Delta x)^p.\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} - \Delta(x+(n+1)\Delta x)^p.\Delta^{-2}a^{x+(n+2)\Delta x} + \Delta^2(x+(n+1)\Delta x)^p.\Delta^{-3}a^{x+(n+3)\Delta x} - \ldots$$
$$\ldots - [x^p.\Delta^{-1}a^x - \Delta x^p.\Delta^{-2}a^{x+\Delta x} + \Delta^2 x^p.\Delta^{-3}a^{x+2\Delta x} - \ldots].$$

Zur Darstellung des gesuchten Summen-Ausdruckes werden uns die positiven Unterschiede der Potenzialfunctionen und die negativen der Exponentialfunctionen nöthig. Die erstern zeigen wir, da ihre entwickelte Darstellung (138.) §. 27. zu weitläuftig würde, nur an; die negativen Unterschiede der Exponentialfunctionen sind nach (202.) folgende:

$$\Delta^{-1} Y_{n+1} = \Delta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1},$$

$$\Delta^{-2} Y_{n+2} = \Delta^{-2} a^{x+(n+2)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+2)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2},$$

$$\Delta^{-3} Y_{n+3} = \Delta^{-3} a^{x+(n+3)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+3)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-1} Y_0 = \Delta^{-1} a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1},$$

$$\Delta^{-2} Y_1 = \Delta^{-2} a^{x+\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2},$$

$$\Delta^{-3} Y_2 = \Delta^{-3} a^{x+2\Delta x} = \frac{a^{x+2\Delta x}}{(a^{x\Delta}-1)^3},$$

u. s. w.

Die Einführung dieser Werthe führt zu folgender Darstellung:

491. $$x^p . a^x + (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$

$$= \frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} - \frac{a^p . a^x}{a^{\Delta x}-1}$$

$$- \frac{\Delta(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+2)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2} + \frac{\Delta x^p . a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}$$

$$+ \frac{\Delta^2(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+3)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3} - \frac{\Delta^2 x^p . a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}.$$

.. ..

Das letzte Glied in der Reihe, stimmt mit den Gliedern der ersten Scheitelreihe im Summen-Ausdrucke nicht überein. Zählen wir, um diese Übereinstimmung herbei zu führen, $(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}$ auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zu, und verbinden dieses Glied mit dem ersten im Summen-Ausdrucke, so wird:

$$\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} + (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+2)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}.$$

Setzen wir ferner nach diesem Zuzählen n statt $n+1$ in der vorliegenden Summengleichung, so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

492. $x^p . a^x + (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$

$$= \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}\,[(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - x^p]$$
$$- \frac{a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}\,[\Delta(x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta\, x^p]$$
$$+ \frac{a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}\,[\Delta^2(x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta^2 x^p]$$
$$- \frac{a^{x+3\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^4}\,[\Delta^3(x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta^3 x^p].$$
. . . .

Eine andere Darstellung für den Summen-Ausdruck der vorliegenden Reihe, der auf den Producten der Verbindungen mit Wiederholungen beruht, wird unten §. 141. No. 611. folgen.

§. 112.

Um die Darstellung des Summen-Ausdruckes für zusammengesetzte Reihen gleicher Art, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, zu gewinnen, gehen wir von der Reihe

$$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$

aus. Mit Hülfe der Gleichung (477.) finden wir diese, wenn wir dort $X_0 = x^p$ und $Y = a^x$ setzen. Es entsteht dann:

$$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - , \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm[(x+(n+1)\Delta x)^p . \zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} - \Delta(x+(n+1)\Delta x)^p . \zeta^{-2} a^{x+(n+2)\Delta x} + \ldots]$$
$$+ x^p . \zeta^{-1} a^x - \Delta x^p . \zeta^{-2} a^{x+\Delta x} + \Delta^2 x^p . \zeta^{-3} a^{x+2\Delta x} - \ldots$$

Die positiven Unterschiede der Potenzialfunctionen deuten wir hier nur an. Die negativen Aufstufungen, die uns nöthig werden, sind nach (87.) §. 14. folgende:

$$\zeta^{-1} Y_{n+1} = \zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}},$$
$$\zeta^{-2} Y_{n+2} = \zeta^{-2} a^{x+(n+2)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2},$$
$$\zeta^{-3} Y_{n+3} = \zeta^{-3} a^{x+(n+3)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+3)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3},$$

u. s. w.,

$$\zeta^{-1} Y_0 = \zeta^{-1} a^x = \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}},$$
$$\zeta^{-2} Y_1 = \zeta^{-2} a^{x+\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2},$$
$$\zeta^{-3} Y_2 = \zeta^{-3} a^{x+2\Delta x} = \frac{a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3},$$

u. s. w.

Werden diese Werthe eingeführt, so gewinnen wir:

493. $x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$

$$= \pm \frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}} + \frac{x^p . a^x}{1+a^{\Delta x}}$$

$$\mp \frac{\Delta (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} - \frac{\Delta x^p . a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$

$$\pm \frac{\Delta^2 (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+3)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3} + \frac{\Delta^2 x^p . a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$

$$\mp \frac{\Delta^3 (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+4)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4} - \frac{\Delta^3 x^p . a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}.$$

. . . .

Das letzte Glied in der Reihe stimmt der Form nach mit den Gliedern der ersten Verticalreihe im Summen-Ausdrucke nicht überein. Um Übereinstimmung herbei zu führen, hat man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}$ bei einer ungeraden Glieder-Anzahl ab, bei einer geraden aber zu zuzählen. Geschieht dies, so wird das Abzählen in Verbindung mit dem ersten Gliede des Summen-Ausdruckes, das positiv ist, zu Folgendem führen:

$$\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}} - (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x} = -\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+2)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}};$$

das Zuzählen aber zu dem ersten Gliede, das negativ ist, zu Folgendem:

$$-\frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}} + (x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{(x+(n+1)\Delta x)^p . a^{x+(n+2)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}.$$

Trennt man nun die Reihen von ungerader und gerader Glieder-Anzahl von einander, und setzt dann n statt $n+1$, der einfachern Darstellung wegen, so führt eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, zu folgendem Summen-Ausdrucke:

494. $x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots + (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$

$$= \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} [(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} + x^p] + \frac{a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} [\Delta (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta x^p]$$

$$- \frac{a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3} [\Delta^2 (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta^2 x^p]$$

$$+ \frac{a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4} [\Delta^3 (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} - \Delta^3 x^p]$$

. . . .

u. s. w.

Eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl führt zu folgender Darstellung:

$$495.\quad x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \dots - (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$

$$= -\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} \left[(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - x^p\right]$$

$$-\frac{a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} \left[\Delta (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} + \Delta x^p\right]$$

$$+\frac{a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3} \left[\Delta^2 (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} + \Delta^2 x^p\right]$$

$$-\frac{a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4} \left[\Delta^3 (x+n\Delta x)^p . a^{n\Delta x} + \Delta^3 x^p\right]$$

. . . .

u. s. w.

Die beiden Gleichungen (494.) und (495.) unterscheiden sich nur durch die Zeichen von einander. Andere Darstellungen für diese Summengleichungen sehe man unten (612.) und (613.) §. 141.

§. 113.

Legen wir die Gleichung (479.) §. 106. zu Grunde, so erhält man, wenn man $X = x^p$ und $Y = a^x$ setzt, folgende Darstellung:

$$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \dots \pm (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$

$$= \pm \left[(x+n\Delta x)^p . \zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} + \Delta (x+(n-1)\Delta x)^n . \zeta^{-2} a^{x+(n+1)\Delta x} + \dots\right]$$

$$+ (x-\Delta x)^p . \zeta^{-1} a^x + \Delta (x-2\Delta x)^p . \zeta^{-2} a^{x+\Delta x} + \dots$$

Die negativen Aufstufungen, die uns nöthig werden, sind nach (87.) §. 14. folgende:

$$\zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}, \qquad \zeta^{-1} a^x = \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}},$$

$$\zeta^{-2} a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}, \qquad \zeta^{-2} a^x = \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^2},$$

$$\zeta^{-3} a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}, \qquad \zeta^{-3} a^x = \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^3},$$

u. s. w.   u. s. w.

Aus der Einführung der vorstehenden Werthe ziehen wir folgende Darstellung für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

496. $$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots + (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} \left[(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} + (x-\Delta x)^p\right]$$
$$+ \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^2} \left[\Delta (x+(n-1)\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} + \Delta (x-2\Delta x)^p\right]$$
$$+ \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^3} \left[\Delta^2 (x+(n-2)\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} + \Delta^2 (x-3\Delta x)^p\right]$$
. . . .
u. s. w.

Für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl aber

497. $$x^p . a^x - (x+\Delta x)^p . a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^p . a^{x+2\Delta x} - \ldots - (x+n\Delta x)^p . a^{x+n\Delta x}$$
$$= - \frac{a^x}{1+a^{\Delta x}} \left[(x+n\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - (x-\Delta x)^p\right]$$
$$- \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^2} \left[\Delta (x+(n-1)\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - \Delta (x-2\Delta x)^p\right]$$
$$- \frac{a^x}{(1+a^{\Delta x})^3} \left[\Delta^2 (x+(n-2)\Delta x)^p . a^{(n+1)\Delta x} - \Delta^2 (x-3\Delta x)^p\right]$$
. . . .
u. s. w.

Auch diese beiden Gleichungen sind in ihren Summen-Ausdrücken nur durch die Zeichen der ersten Scheitelreihe verschieden. Andere Darstellungen für die Summengleichungen (496.) und (497.) finden sich unten §. 141. No. 614. und 615.

§. 114.

Gehen wir nun zu Anwendungen über, so ist zu bemerken, dafs uns die Unterschiede der Potenzialfunctionen nöthig werden. Wir erhalten aus (138.), wenn wir statt p die verschiedenen Exponenten setzen, und Y als eine Function von x betrachten, folgende Zusammenstellung:

498. $\Delta Y = \Delta x, \quad \Delta^2 Y = 0, \quad \Delta^3 Y = 0,$

499. $\Delta^1 Y^2 = 2 Y . \Delta x + (\Delta x)^2, \quad \Delta^2 Y^2 = 2(\Delta x)^2,$

für die höhern Unterschiede $\Delta^3 Y^2 = 0$, $\Delta^4 Y^2 = 0$, u. s. w.

Die Unterschiede von Y^3 sind:

500. $$\begin{cases} \Delta\, Y^3 = 3 Y^2 \Delta x + 3 Y (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \\ \Delta^2 Y^3 = 6 Y (\Delta x)^2 + 6 (\Delta x)^3, \\ \Delta^3 Y^3 = 6 (\Delta x)^3; \end{cases}$$

die höhern sind $\Delta^4 Y^3 = 0$, $\Delta^5 Y^3 = 0$, u. s. w.

Die Unterschiede von Y^4 sind:

$$501.\quad \begin{cases} \Delta\, Y^4 = 4Y^3\Delta x + 6Y^2(\Delta x)^2 + 4Y(\Delta x)^3 + (\Delta x)^4, \\ \Delta^2 Y^4 = 12Y^2(\Delta x)^2 + 24Y(\Delta x)^3 + 14(\Delta x)^4, \\ \Delta^3 Y^4 = 24Y(\Delta x)^3 + 36(\Delta x)^4, \\ \Delta^4 Y^4 = 24(\Delta x)^4; \end{cases}$$

die höhern Unterschiede sind $\Delta\, Y^4=0$, $\Delta^6 Y^4=0$, u. s. w.

Setzen wir nun, um einige specielle Fälle zu gewinnen, in der Gleichung (492.) die Function $Y=(x+n\Delta x)$ und $Y=x$; ferner statt p allmählig die Werthe 1, 2, 3, ...: so erhalten wir für Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, folgende Darstellung:

$$502.\quad \begin{cases} x.a^x+(x+\Delta x).a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x).a^{x+2\Delta x}+\ldots+(x+n\Delta x).a^{x+n\Delta x} \\ \quad = \dfrac{a^x[(x+n\Delta x).a^{(n+1)\Delta x}-x]}{a^{\Delta x}-1} - \dfrac{a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}(\Delta x.a^{n\Delta x}-\Delta x), \\ x^2.a^x+(x+\Delta x)^2.a^{x+\Delta x}+\ldots+(x+n\Delta x)^2.a^{x+n\Delta x} \\ \quad = \dfrac{a^x}{a^{\Delta x}-1}((x+n\Delta x)^2.a^{(n+1)\Delta x}-x^2) \\ \quad - \dfrac{a^{x+\Delta x}.\Delta x}{(a^{\Delta x}-1)^2}([2(x+n\Delta x)+\Delta x]a^{n\Delta x}-(2x+\Delta x)) \\ \quad + \dfrac{(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}(2.a^{n\Delta x}-2), \\ x^3.a^x+(x+\Delta x)^3.a^{x+\Delta x}+\ldots+(x+n\Delta x)^3.a^{x+n\Delta x} \\ \quad = \dfrac{a^x}{a^{\Delta x}-1}((x+n\Delta x)^3.a^{(n+1)\Delta x}-x^3) \\ \quad - \dfrac{\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}([3(x+n\Delta x)^2+3(x+n\Delta x)\Delta x+(\Delta x)^2]a^{n\Delta x}-[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]) \\ \quad + \dfrac{(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}([6(x+\Delta x)+6\Delta x]a^{n\Delta x}-[6x+6\Delta x]) - \dfrac{(\Delta x)^3.a^{x+3\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^4}(6a^{n\Delta x}-6), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Führen wir dieselben Werthe in die Gleichungen (494.) und (495.) ein, und ziehen beide Darstellungen, der Kürze wegen, in eine zusammen; so erhalten wir Folgendes für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind:

$$503. \begin{cases} x.a^x-(x+\Delta x).a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x).a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x).a^{x+n\Delta x} \\ \quad =\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}((x+n\Delta x).a^{(n+1)\Delta x}\pm x)\pm\frac{\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^2}(a^{n\Delta x}\mp 1), \\ x^2.a^x-(x+\Delta x)^2.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x)^2.a^{x+n\Delta x} \\ \quad =\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}((x+n\Delta x)^2.a^{(n+1)\Delta x}\pm x^2) \\ \qquad \pm\frac{\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}([2(x+n\Delta x)+\Delta x]\,a^{n\Delta x}\mp[2x+\Delta x]) \\ \qquad \mp\frac{(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}(a^{n\Delta x}\mp 1), \\ x^3.a^x-(x+\Delta x)^3.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^3.a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x)^3.a^{x+n\Delta x} \\ \quad =\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}((x+n\Delta x)^3.a^{(n+1)\Delta x}-x^3) \\ \qquad \pm\frac{\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}([3(x+n\Delta x)^2+3(x+n\Delta x)+(\Delta x)^2]a^{n\Delta x}\mp[3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2]) \\ \qquad \mp\frac{(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}1.2([3(x+n\Delta x)+3\Delta x]\,a^{n\Delta x}\mp[3x+3\Delta x]) \\ \qquad \pm\frac{1.2.3.(\Delta x)^3.a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}(a^{n\Delta x}\mp 1), \\ \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Legen wir endlich die Gleichungen (496.) und (497.) zum Grunde, und ziehen sie in eine Darstellung zusammen, so erhalten wir, mit Benutzung der Gleichungen (498.) u. ff.:

$$504. \begin{cases} x.a^x-(x+\Delta x).a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x).a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x).a^{x+n\Delta x} \\ \quad =\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+n\Delta x).a^{(n+1)\Delta x}\pm(x-\Delta x)]\pm\frac{\Delta x.a^x}{(1+a^{\Delta x})^2}(a^{(n+1)\Delta x}\pm 1), \\ x^2.a^x-(x+\Delta x)^2.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x)^2.a^{x+n\Delta x} \\ \quad =\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}((x+n\Delta x)^2.a^{(n+1)\Delta x}\pm(x-\Delta x)^2) \\ \qquad \pm\frac{\Delta x.a^x}{(1+a^{\Delta x})^2}([2(x+(n-1)\Delta x)+\Delta x]a^{(n+1)\Delta x}\pm[2(x-2\Delta x)+\Delta x]) \\ \qquad \pm\frac{1.2.(\Delta x)^2.a^x}{(1+a^{\Delta x})^3}(a^{(n+1)\Delta x}\pm 1), \end{cases}$$

$$504.\quad\begin{cases} x^3.a^x-(x+\Delta x)^3.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^3.a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x)^3.a^{x+n\Delta x} \\ \quad=\pm\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}((x+n\Delta x)^3.a^{(n+1)\Delta x}\pm(x-\Delta x)^3) \\ \quad\pm\frac{\Delta x.a^x}{(1+a^{\Delta x})^2}\Big([3(x+(n-1)\Delta x)^2+3(x+(n-1)\Delta x)\Delta x+(\Delta x)^2]\,a^{(n+1)\Delta x} \\ \qquad\qquad\pm[3(x-2\Delta x)^2+3(x-2\Delta x)\,\Delta x+(\Delta x)^2]\Big) \\ \quad\pm\frac{1.2.(\Delta x)^2.a^x}{(1+a^{\Delta x})^3}([3(x+(n-2)\Delta x)+3\Delta x]\,a^{(n+1)\Delta x}\pm[3(x-3\Delta x)+\Delta x]) \\ \quad\pm\frac{1.2.3.(\Delta x)^3.a^x}{(1+a^{\Delta x})^4}(a^{(n+1)\Delta x}\pm1), \\ \quad\text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 115.

So weitläufig die gegebenen Summenformeln erscheinen, so lassen sie doch bedeutende Reductionen zu, wenn wir in ihnen für x und Δx, deren Annahme ganz der Willkühr unterliegt, bestimmte Werthe setzen. Nehmen wir den einfachsten Fall an, setzen $x=0$ und $\Delta x=1$, so ziehen wir aus den vorstehenden Gleichungen für die Summenformeln zusammengesetzter Reihen folgende sehr kurze Darstellungen, und zwar aus (502.):

$$505.\quad\begin{cases} 1.a+2.a^2+3.a^3+4.a^4+\ldots+n.a^n \\ =\frac{a^{n+1}}{a-1}-\frac{a^{n+1}-a}{(a-1)^2}, \\ 1^2.a+2^2.a^2+3^2.a^3+4^2.a^4+\ldots+n^2.a^n \\ =\frac{n^2.a^{n+1}}{a-1}-\frac{a}{(a-1)^2}((2n+1)a^n-1)+\frac{1.2.a^2}{(a-1)^3}(a^n-1), \\ 1^3.a+2^3.a^2+3^3.a^3+4^3.a^4+\ldots+n^3.a^n \\ =\frac{n^3.a^{n+1}}{a-1}-\frac{a}{(a-1)^2}((3n^2+3n+1)a^n-1)+\frac{1.2.a^2}{(a-1)^3}((3n+3)a^n-3)-\frac{1.2.3.a^3}{(a-1)^4}(a^n-1), \\ 1^4.a+2^4.a^2+3^4.a^3+4^4.a^4+\ldots+n^4.a^n \\ =\frac{n^4.a^{n+1}}{a-1}-\frac{a}{(a-1)^2}((4n^3+6n^2+4n+1)a^n-1)+\frac{1.2.a^2}{(a-1)^3}((6n^2+12n+7)a^n-7) \\ \quad-\frac{1.2.3.a^3}{(a-1)^4}((4n+6)a^n-6)+\frac{1.2.3.4.a^4}{(a-1)^5}(a^n-1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzen wir in denjenigen Reihen (503.) und (504.), deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, wie vorhin $x=0$ und $\Delta x=1$: so ist zu berücksichtigen, daſs das erste Glied verschwindet, und daſs

dann das zweite, welches an die Stelle des ersten rückt, mit dem negativen Zeichen versehen ist, wodurch der Zeichenwechsel umgekehrt wird.

Verwandelt man daher die Zeichen aller Glieder in die entgegengesetzten, so erscheint wieder der vorige Zeichenwechsel. Wenden wir diese Bemerkungen auf die genannten Gleichungen an, so erhalten wir dieselben Gebilde mit veränderten Zeichen, und die Reihen von ungerader Glieder-Anzahl werden zu folgenden Darstellungen führen:

$$506.\quad \begin{cases} 1.a - 2.a^2 + 3.a^3 - \ldots + n.a^n \\ \quad = \frac{n.a^{n+1}}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2}(a^n+1), \\ 1^2.a - 2^2.a^2 + 3^2.a^3 - \ldots + n^2.a^n \\ \quad = \frac{n^2.a^{n+1}}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2}((2n+1)a^n+1) - \frac{1.2.a^2}{(1+a)^3}(a^n+1), \\ 1^3.a - 2^3.a^2 + 3^3.a^3 - \ldots + n^3.a^n \\ \quad = \frac{n^3.a^{n+1}}{1+a} + \frac{a}{(1+a)^2}((3n^2+3n+1)a^n+1), \\ \qquad - \frac{1.2.a^2}{(1+a)^3}((3n+3)a^n+3) + \frac{1.2.3.a^2}{(1+a)^4}(a^n+1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Reihen aber von gerader Glieder-Anzahl zu folgenden:

$$507.\quad \begin{cases} 1.a - 2.a^2 + 3.a^3 - \ldots - n.a^n \\ \quad = -\frac{n.a^{n+1}}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2}(a^n-1), \\ 1^2.a - 2^2.a^2 + 3^2.a^3 - \ldots - n^2.a^n \\ \quad = -\frac{n^2.a^{n+1}}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2}((2n+1)a^n-1) + \frac{2.a^2}{(1+a)^3}(a^n-1), \\ 1^3.a - 2^3.a^2 + 3^3.a^3 - \ldots - n^3.a^n \\ \quad = \frac{n^3.a^{n+1}}{1+a} - \frac{a}{(1+a)^2}((3n^2+3n+1)a^n-1) + \frac{1.2.a^2}{(1+a)^3}((3n+3)a^n-3) \\ \qquad - \frac{1.2.3.a^3}{(1+a)^4}(a^n-1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Wenden wir endlich ein gleiches Verfahren auf die Reihen (504.) und (506.) an, so erhalten wir für Reihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl folgende Summen-Ausdrücke:

508.

$$1.a - 2.a^2 + 3.a^3 - \ldots + n.a^n = \frac{n.a^{n+1}+1}{1+a} + \frac{a^{n+1}-1}{(1+a)^2},$$

$$1^2.a^2 - 2^2.a^2 + 3^2.a^3 - \ldots + n^2.a^n$$
$$= \frac{n^2.a^{n+1}-1}{1+a} + \frac{(2n-1)a^{n+1}+3}{(1+a)^2} + \frac{1.2}{(1+a)^3}(a^{n+1}-1),$$

$$1^3.a^1 - 2^3.a^2 + 3^3.a^3 - \ldots + n^3.a^3$$
$$= \frac{n^3.a^{n+1}+1}{1+a} + \frac{(3(n-1)^2+3n-2)a^{n+1}-7}{(1+a)^2} + 2.\frac{(3n-3)a^{n-1}+8}{(1+a)^3} + 1.2.3.\frac{a^{n+1}-1}{(1+a)^4},$$

$$1^4.a - 2^4\ a^2 + 3^4.a^3 - \ldots + n^4.a^n$$
$$= \frac{n^4.a^{n+1}-1}{1+a} + \frac{[4(n-1)^3+6(n-1)^2+4n-3]a^{n+1}-15}{(1+a)^2}$$
$$+ 1.2.\frac{[6(n-2)^2+12n-17]a^{n+1}-25}{(1+a)^3} + 1.2.3.\frac{(4n-6)a^{n+1}-10}{(1+a)^4} + 1.2.3.4.\frac{a^{n+1}-1}{(1+a)^5},$$

u. s. w.

Für eine Reihe von einer geraden Glieder-Anzahl aber folgende:

509.

$$1.a - 2.a^2 + 3.a^3 - \ldots - n.a^n = -\frac{n.a^{n+1}-1}{1+a} - \frac{a^{n+1}+1}{(1+a)^n},$$

$$1^2.a - 2^2.a^2 + 3^2.a^3 - \ldots - n^2.a^n$$
$$= \frac{n^2.a^{n+1}+1}{1+a} - \frac{(2n-1)a^{n+1}-3}{(1+a)^2} - 1.2\frac{a^{n+1}+1}{(1+a)^3},$$

$$1^3.a - 2^3.a^2 + 3^3.a^3 - \ldots - n^3.a^n$$
$$= -\frac{n^3.a^{n+1}-1}{1+a} - \frac{(3(n-1)^2+3n-2)a^{n+1}-7}{(1+a)^2} - 1.2.\frac{(3n-3)a^{n+1}-8}{(1+a)^3} - 1.2.3.\frac{a^{n+1}+1}{(1+a)^4},$$

$$1^4.a - 2^4.a^2 + 3^4.a^3 - \ldots - n^4.a^n$$
$$= -\frac{n^4.a^{n+1}+1}{1+a} - \frac{[4(n-1)^3+6(n-1)^2+4n-3]a^{n+1}-15}{(1+a)^2}$$
$$-1.2.\frac{[6(n-2)+12n-17]a^{n+1}+25}{(1+a)^3} - 1.2.3.\frac{(4n-6)a^{n+1}-10}{(1+a)^4}$$
$$-1.2.3.4.\frac{a^{n+1}+1}{(1+a)^5},$$

u. s. w.

(Die Fortsetzung folgt.)

18.

De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici.

(Auctore C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

1.

In *Actis Berolinensibus* a. 1748 in commentatione, cui inscriptum est: „*Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes*" observavit summus *Eulerus*, duabus curvis tertii ordinis se in 9 punctis intersecantibus, per quaelibet 8 e punctis illis nonum determinatum esse; duabus curvis quarti ordinis se in 16 punctis intersecantibus, per quaelibet 13 e punctis illis reliqua tria determinata esse; duabus curvis quinti ordinis se in 25 punctis intersecantibus, per quaelibet 19 e punctis illis reliqua 6 determinata esse, cet. Rem geometricam etiam in terminis algebraicis pronunciare licet. Duabus aequationibus tertii ordinis inter duas variabiles x, y si per novem systemata valorum $x = x_1$, $y = y_1$; $x = x_2$, $y = y_2$; ... ... $x = x_9$, $y = y_9$ satisfit, valores illi non ex arbitrio statui possunt, sed si octo illorum valorum dantur systemata, nonum inde determinatum est, sive inter 18 valores $x_1, x_2, \ldots x_9$ et $y_1, y_2, \ldots y_9$ duae habentur aequationes conditionales; si aequationes sunt quarti ordinis, quibus per 16 systemata valorum variabilium satisfit, datis 13 e systematis illis, tria reliqua determinata sunt, cet. Res ab *Eulero* observata gravissima est, quippe in qua fortasse maximum impedimentum positum est, quominus plurima quae de functionibus integris unius variabilis ab Analystis inventa sint, ad systema duarum functionum integrarum duarum variabilium extendantur. Cognitis enim pro una variabili valoribus variabilis, pro quibus functio integra eius evanescit, habetur ipsa functio ut productum e factoribus linearibus, quae nihilo aequiparatae valores illos suggerunt. Si vero proponeretur quaestio analoga, ut e systematis valorum simultaneorum duarum variabilium, pro quibus duae functiones earum integrae simul evanescunt, ipsae exhibeantur functiones, haec questio ab antecedente iam eo differret, quod in illa variabilis valores ex arbitrio accipi possint,

in hac inter valores variabilium certae aequationes conditionales intercedere debeant, ut eiusmodi omnino extare possint functiones. Qua de re mihi utile videbatur, in aequationes illas conditionales paullo accuratius inquirere.

Sit u expressio ipsarum x, y rationalis integra n^{ti} ordinis, quae $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ terminis constare potest. Dentur $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2$ systemata valorum $x=x_m$, $y=y_m$, quae efficiant $u=0$; habentur inter $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ coëfficientes expressionis u aequationes lineares $\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2$, quarum ope e duabus coëfficientibus reliquae lineariter determinari possunt. Sint coëfficientes duae, quibus reliquae lineariter determinantur, a et b, atque sit valor coëfficientis termini $x^\alpha y^\beta$,

$$a_{\alpha,\beta}\,.\,a+b_{\alpha,\beta}\,.\,b,$$

designantibus $a_{\alpha,\beta}$, $b_{\alpha,\beta}$ expressiones e valoribus x_1, y_1; x_2, y_2; .... $x_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2}$, $y_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}-2}$ compositas. Quibus statutis, functio u formam induet

$$a\Sigma a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta+b\Sigma b_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta = u,$$

quibus in summis numeris integris positivis α, β valores omnes conveniunt, pro quibus $\alpha+\beta\leqq n$. Hanc igitur formam induere debent functiones omnes ipsarum x, y integrae n^{ti} ordinis, quae pro datis illis valoribus simultaneis evanescunt. Quoties igitur altera functio n^{ti} ordinis v pro iisdem valoribus simultaneis evanescit, fieri debet

$$v = a'\Sigma a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta+b'\Sigma b_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta,$$

designantibus a', b' alias constantes, sive quae rationem inter se diversam tenent atque constantes a, b. Alioquin enim v et u tantum factore constante inter se differrent.

Sed aequationibus n^{ti} ordinis $u=0$, $v=0$, sive aequationibus, quae earum locum tenent,

$$\Sigma a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta = 0, \qquad \Sigma b_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta = 0,$$

conveniunt n^2 systemata radicum simultaneorum. Aequationes autem antecedentes vidimus per $\frac{n+1.n+2}{2}-2$ systemata determinata esse. Unde praeter systemata $\frac{n+1.n+2}{2}-2$ proposita, habentur adhuc alia numero

$$n^2-\frac{n+1.n+2}{2}+2=\frac{(n-1)(n-2)}{2},$$

quae illis determinata sunt. Unde habetur theorema,

1) *E n^2 systematis valorum ipsarum x, y simultaneorum, quae duabus aequationibus n^{ti} ordinis inter x, y propositis satisfaciant, tantum $\frac{n^2+3n-2}{2}$ ex arbitrio accipi posse, reliqua $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ ex illis determinari, sive inter n^2 valores ipsius x et n^2 valores ipsius y illis respondentes haberi $(n-1)(n-2)$ aequationes conditionales;*

quod geometrice ita exhibetur theorema:

2) *E n^2 punctis intersectionis duarum curvarum n^{ti} ordinis $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ puncta reliquis determinata esse.*

2.

Antecedentibus bene confirmantur, quas nuper dedi relationes memorabiles inter valores incognitarum, quae duabus simul aequationibus algebraicis satisfaciunt. (Cf. comment. inser. *theoremata nova algebraica etc., V. XIV. pag.* 281.) Sint enim $x = x_1$, $y = y_1$; $x = x_2$, $y = y_2$; .... $x = x_{\mu\nu}$, $y = y_{\mu\nu}$ systemata $\mu\nu$ valorum ipsarum x, y, quae duabus aequationibus algebraicis $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ satisfaciunt, quarum altera μ^{ti}, altera ν^{ti} ordinis est, dedi aequationes:

$$
3)\quad
\begin{aligned}
&\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\dots+\frac{1}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{x_1}{R_1}+\frac{x_2}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{y_1}{R_1}+\frac{y_2}{R_2}+\dots+\frac{y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{x_1^2}{R_1}+\frac{x_2^2}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{x_1 y_1}{R_1}+\frac{x_2 y_2}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu\nu} y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{y_1^2}{R_1}+\frac{y_2^2}{R_2}+\dots+\frac{y_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{x_1^{\mu+\nu-3}}{R_1}+\frac{x_2^{\mu+\nu-3}}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu}^{\mu+\nu-3}}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{x_1^{\mu+\nu-4}y_1}{R_1}+\frac{x_2^{\mu+\nu-4}y_2}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu\nu}^{\mu+\nu-4}y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\frac{x_1^{\mu+\nu-5}y_1^2}{R_1}+\frac{x_2^{\mu+\nu-5}y_2^2}{R_2}+\dots+\frac{x_{\mu\nu}^{\mu+\nu-5}y_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}}=0,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{y_1^{\mu+\nu-3}}{R_1}+\frac{y_2^{\mu+\nu-3}}{R_2}+\dots+\frac{y_{\mu\nu}^{\mu+\nu-3}}{R_{\mu\nu}}=0,
\end{aligned}
$$

quibus in aequationibus est R_m valor, quem, posito simul $x = x_m$, $y = y_m$, induit expressio

$$R = \frac{df}{dx} \cdot \frac{d\varphi}{dy} - \frac{df}{dy} \cdot \frac{d\varphi}{dx}.$$

Aequationum numerus est $\frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1)}{2}$, ideoque si $\mu = \nu = n$, $\frac{(2n-2)(2n-1)}{2}$; eliminatis n^2 quantitatibus $R_1, R_2, \ldots R_{n^2}$, proveniunt inter ipsas $x_1, x_2, \ldots x_{n^2}$ atque $y_1, y_2, \ldots y_{n^2}$ aequationes conditionales numero

$$\frac{(2n-2)(2n-1)}{2} - n^2 + 1 = (n-1)(n-2),$$

quod cum theoremate (I) supra proposito convenit.

Quoties aequationibus $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$, quarum altera μ^{ti}, altera ν^{ti} ordinis est, per $\mu\nu$ systemata valorum $x = x_m$, $y = y_m$ satisfieri potest: facile etiam *a priori* probari potest, ipsis R_m certos quosdam valores tribuendo aequationes omnes (3) obtineri posse. Statuamus enim, e duabus aequationibus propositis $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ aliam quamcunque derivari aequationem, in cuius terminis $x^\alpha y^\beta$ sit $\alpha + \beta \leqq \mu + \nu - 3$. Quam designemus aequationem per

$$\Sigma p_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = 0.$$

De qua, ponendo pro x, y radices simultaneas, fluunt $\mu\nu$ sequentes:

$$\begin{aligned} \Sigma p_{\alpha,\beta} x_1^\alpha y_1^\beta &= 0, \\ \Sigma p_{\alpha,\beta} x_2^\alpha y_2^\beta &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \quad \cdot \quad \cdot \\ \Sigma p_{\alpha,\beta} x_{\mu\nu}^\alpha y_{\mu\nu}^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Quibus respective multiplicatis per $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \ldots \frac{1}{R_{\mu\nu}}$ et additis, provenit:

$$\Sigma p_{\alpha,\beta} \left[\frac{x_1^\alpha y_1^\beta}{R_1} + \frac{x_2^\alpha y_2^\beta}{R_2} + \ldots + \frac{x_{\mu\nu}^\alpha y_{\mu\nu}^\beta}{R_{\mu\nu}} \right] = 0.$$

Cuius aequationis ope aequationum (3) una e reliquis fluit. Eiusmodi autem aequationes habentur tot, quot ex aequationibus propositis derivari possunt aequationes, in quarum terminis $x^\alpha y^\beta$ sit $\alpha + \beta \leqq \mu + \nu - 3$. Quae obtinentur omnes, multiplicando aequationem μ^{ti} ordinis per terminos $x^\alpha y^\beta$, in quibus $\alpha + \beta \leqq \nu - 3$, quorum est numerus $\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{2}$, porro aequationem ν^{ti} ordinis per terminos $x^\alpha y^\beta$, in quibus $\alpha + \beta \leqq \mu - 3$, quo-

rum est numerus $\frac{(\mu-2)(\mu-1)}{2}$; unde totus earum numerus fit $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}$ $+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$. Et totidem habentur aequationes huiusmodi:

$$\Sigma p_{\alpha,\beta}\left[\frac{x_1^\alpha y_1^\beta}{R_1}+\frac{x_2^\alpha y_2^\beta}{R_2}+\ldots\ldots+\frac{x_{\mu\nu}^\alpha y_{\mu\nu}^\beta}{R_{\mu\nu}}\right]=0,$$

quarum unaquaque una aequationum (3) ad reliquas revocatur. Unde aequationes (3), quarum est numerus $\frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1)}{2}$, revocantur omnes ad

$$\frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1)}{2}-\frac{(\nu-2)(\nu-1)}{2}-\frac{(\mu-2)(\mu-1)}{2}=\mu\nu-1.$$

Quibus $\mu\nu-1$ aequationibus per valores $\mu\nu$ quantitatum $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, ... $\frac{1}{R_{\mu\nu}}$ idonee determinatos satisfieri potest. — Patet antecedentibus, ubi constet, $\mu\nu$ paria coniugata valorum $x=x_m$, $y=y_n$ satisfacere duabus aequationibus μ^{ti} et ν^{ti} ordinis, $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$: si $\mu\nu$ quantitatum $\frac{1}{R_m}$ rationes per $\mu\nu-1$ ex aequationibus (3) determinentur, reliquas $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ inde sponte fluere. Qua de re theorema a nobis in commentatione citata inventum et quod formulis (3) continetur, nil docet, nisi, determinatis rationibus, in quibus inter se sunt $\mu\nu$ quantitates $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{R_{\mu\nu}}$ per $\mu\nu-1$ e numero aequationum (3), easdem rationes inter se tenere valores, quos expressio

$$\frac{1}{\frac{df}{dx}\cdot\frac{d\varphi}{dy}-\frac{df}{dy}\cdot\frac{d\varphi}{dx}},$$

pro radicibus simultaneis aequationum $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$ induit.

Reliquae enim aequationes numero $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ eo solo ex illis $\mu\nu-1$ proveniunt, quod $\mu\nu$ systemata valorum $x=x_m$, $y=y_m$ sint radices simultaneae duarum aequationum, alterius μ^{ti}, alterius ν^{ti} ordinis. —

E $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ aequationum (3) si ope reliquarum $\mu\nu-1$ eliminamus R_1, R_2, ... $R_{\mu\nu}$, obtinentur inter solas x_m, y_m aequationes $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$. Obvenit hic insigne *paradoxon*. Demonstravimus enim, si $\mu\nu$ systemata valorum $x=x_m$, $y=y_m$ sint ra-

dices simultaneae duarum aequationum, alterius μ^{ti}, alterius ν^{ti} ordinis, intercedere inter $2\mu\nu$ quantitates x_m, y_m aequationes conditionales numero $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$. At fieri potest, ut sit

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}\geqq 2\mu\nu,$$

sive numerus aequationum conditionalium numerum incognitarum aut adaequet aut adeo superet. Quod absurdum est.

3.

Paradoxon antecedentibus propositum ut explicetur, pro certis ipsorum μ, ν valoribus fieri debet, ut ex aequationibus (3) eliminatis quantitatibus R_m, aequationes restantes numero $\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$ aliae aliis contineantur. Unde revera numerus aequationum conditionalium a se invicem independentium prodibit $<\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$. Hoc vero e natura aequationum (3) demonstrare et accuratius definire numerum aequationum conditionalium, quae superfluae sunt seu reliquis continentur, primo intuitu vires Algebrae superare videtur.

Aequationes superfluae certe non proveniunt, si $\mu=\nu$. Eo enim casu per alias considerationes initio huius commentatiunculae vidimus, necessario requiri aequationes conditionales numero $(\mu-1)(\mu-2)=\frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}$. Neque eo casu paradoxi locus est, cum numerus ille sit quantitatum x_m, y_m numero $2\mu^2$ plus quam dimidio inferior. Iam etiam, si μ et ν inter se diversi sunt, per considerationes similes atque supra adhibuimus, exploremus verum numerum aequationum conditionalium. Quo facto, ex ipsa natura aequationum (3) demonstratum eamus, reliquas illis contineri.

Sit $\nu<\mu$; aequatio ν^{ti} ordinis determinata est per $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}-1$ systemata valorum ipsarum x, y simultaneorum, quibus aequationi illi satisfit. Ut eidem aequationi systemata reliqua $\mu\nu-\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}+1$ satisfaciant, totidem haberi debent aequationes conditionales. Iisdem valoribus aequationi μ^{ti} ordinis satisfieri propositum est. Formare vero licet alteram aequationem μ^{ti} ordinis, cui $\mu\nu$ systemata valorum sponte satisfaciunt, multiplicando aequationem ν^{ti} ordinis cum functione $(\mu-\nu)^{ti}$ ordi-

nis, cuius coëfficientes, quarum numerus est $\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)}{2}$, arbitrariae esse possunt. Utramque aequationem μ^{ti} ordinis si iungimus, per constantes illas arbitrarias effici potest, ut totidem eius termini evanescant; sive statuere licet, aequationem μ^{ti} ordinis, cui praeter aequationem ν^{ti} ordinis satisfaciendum est, tantum constare terminorum numero

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}-\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)}{2}.$$

Cuiusmodi aequationi ut per $\mu\nu$ systemata valorum ipsarum x, y simultaneorum satisfiat, locum habere debent aequationes conditionales numero

$$\mu\nu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)}{2}+1.$$

Habetur igitur totus numerus aequationum conditionalium,

$$\mu\nu-\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}+1+\mu\nu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)}{2}+1$$
$$=\mu\nu-3\nu+1.$$

Unde prodit theorema:

4) *Quoties* $\mu.\nu$ *systemata valorum ipsarum* x, y, $x=x_1$, $y=y_1$; $x=x_2$, $y=y_2$; .... $x=x_{\mu\nu}$, $y=y_{\mu\nu}$ *satisfacere debent duabus aequationibus algebraicis, alteri* μ^{ti}, *alteri* ν^{ti} *ordinis, ubi* $\nu<\mu$: *inter* $2\mu\nu$ *quantitates* x_1, x_2, ... $x_{\mu\nu}$ *et* y_1, y_2, ... $y_{\mu\nu}$ *aequationes conditionales numero* $\mu\nu-3\nu+1$ *intercedere debent.*

Quod theorema geometrice ita enunciari potest:

5) *Quoties* $\mu.\nu$ *puncta in duabus curvis algebraicis* μ^{ti} *et* ν^{ti} *ordinis posita esse debent, ubi* $\mu>\nu$; *inter coordinatas punctorum intercedere debent aequationes conditionales numero* $\mu\nu-3\nu+1$.

Theorema (3) sive (4) collatum cum (2) sive (3) docet, si $\mu=\nu$, numerum aequationum conditionalium unitate augendum esse.

Punctis $\mu\nu$ in curva ν^{ti} ordinis positis, ut eadem puncta in altera curva μ^{ti} ordinis posita esse possint, ubi $\mu>\nu$, sequitur ex iis, quae antecedentibus demonstravimus, requiri inter coordinatas punctorum aequationes conditionales numero

$$\mu\nu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)}{2}+1=\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}.$$

Habentur igitur theoremata specialia:

6) Assumtis in linea recta μ punctis, sive in curva secundi ordinis 2μ punctis, per eadem puncta curvam μ^{ti} ordinis ducere licet.

7) Assumtis in curva tertii ordinis 3μ punctis, ubi $\mu > 3$, ut per eadem duci possit curva μ^{ti} ordinis, inter coordinatas punctorum aequatio una conditionalis locum habere debet.

8) Assumtis in curva quarti ordinis 4μ punctis, ubi $\mu > 4$, ut per eadem puncta duci possit curva μ^{ti} ordinis, inter coordinatas punctorum locum habere debent tres aequationes conditionales; cet. cet.

Vel *si quaeris maximum numerum punctorum, quae in curva ν^{ti} ordinis ex arbitrio assumi possint, ut per eadem alteram curvam μ^{ti} ordinis ducere liceat, ubi $\mu > \nu$, numerus iste punctorum erit*

$$\mu\nu - \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2}.$$

Eliminatis e (3) quantitatibus $R_1, R_2, \ldots . R_{\mu\nu}$, cum inter $2\mu\nu$ quantitates $x_1, x_2, \ldots . x_{\mu\nu}$, et $y_1, y_2, \ldots . y_{\mu\nu}$ prodeunt aequationes numero

$$\frac{(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-1)}{2} - \mu\nu + 1 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2};$$

cum vero e (4) inter easdem quantitates tantum $\mu\nu - 3\nu + 1$ aequationes conditionales locum habere debeant, si $\mu > \nu$; sequitur, *aequationum illarum, si $\mu > \nu$, numerum*

$$\frac{(\mu-\nu-1)(\mu-\nu-2)}{2}$$

reliquis contineri.

Quod reapse fieri, iam ex ipsa natura aequationum (3) sequentibus comprobemus.

4.

Statuamus inter $\mu\nu$ incognitas $u_1, u_2, \ldots . u_{\mu\nu}$ totidem intercedere aequationes lineares huiusmodi:

$$
\begin{aligned}
9)\quad & \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (0,0),\\
& \frac{u_1 x_1}{R_1} + \frac{u_2 x_2}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (1,0),\\
& \frac{u_1 x_1^2}{R_1} + \frac{u_2 x_2^2}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}} = (2,0),\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
& \frac{u_1 x_1^{\mu-1}}{R_1} + \frac{u_2 x_2^{\mu-1}}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}^{\mu-1}}{R_{\mu\nu}} = (\mu-1,0),\\
& \frac{u_1 y_1}{R_1} + \frac{u_2 y_2}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu} y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (0,1),\\
& \frac{u_1 x_1 y_1}{R_1} + \frac{u_2 x_2 y_2}{R_2} \ldots . + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu} y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (1,1),\\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

$$\frac{u_1 x_1^{\mu-1} y_1}{R_1} + \frac{u_2 x_2^{\mu-1} y_2}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}^{\mu-1} y_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (\mu-1, 1),$$

$$\frac{u_1 y_1^2}{R_1} + \frac{u_2 y_2^2}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} y_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}} = (0, 2),$$

$$\frac{u_1 x_1 y_1^2}{R_1} + \frac{u_2 x_2 y_2^2}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu} y_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}} = (1, 2),$$

. . . .

$$\frac{u_1 x_1^{\mu-1} y_1^2}{R_1} + \frac{u_2 x_2^{\mu-1} y_2^2}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}^{\mu-1} y_{\mu\nu}^2}{R_{\mu\nu}} = (\mu-1, 2),$$

. . . .

$$\frac{u_1 y_1^{\nu-1}}{R_1} + \frac{u_2 y_2^{\nu-1}}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} y_{\mu\nu}^{\nu-1}}{R_1} = (0, \nu-1),$$

$$\frac{u_1 x_1 y_1^{\nu-1}}{R_1} + \frac{u_2 x_2 y_2^{\nu-1}}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu} y_{\mu\nu}^{\nu-1}}{R_1} = (1, \nu-1),$$

. . . .

$$\frac{u_1 x_1^{\mu-1} y_1^{\nu-1}}{R_1} + \frac{u_2 x_2^{\mu-1} y_2^{\nu-1}}{R_2} \dots + \frac{u_{\mu\nu} x_{\mu\nu}^{\mu-1} y_{\mu\nu}^{\nu-1}}{R_{\mu\nu}} = (\mu-1, \nu-1).$$

Quarum aequationum forma generalis est:

$$10) \quad \frac{x_1^\alpha y_1^\beta u_1}{R_1} + \frac{x_2^\alpha y_2^\beta u_2}{R_2} \dots + \frac{x_{\mu\nu}^\alpha y_{\mu\nu}^\beta u_{\mu\nu}}{R_{\mu\nu}} = (\alpha, \beta),$$

de qua forma generali proveniunt $\mu\nu$ aequationes (9), tributo ipsi α valores 0, 1, 2, ... $\mu-1$, ipsi β valores 0, 1, 2, ... $\nu-1$. Statuamus porro, e resolutione aequationum linearium (9) provenire incognitarum valores sequentes:

$$\begin{aligned} u_1 = {} & A'_{0,0}(0,0) + A'_{1,0}(1,0) \dots + A'_{\mu-1,0}(\mu-1,0) \\ & + A'_{0,1}(0,1) + A'_{1,1}(1,1) \dots + A'_{\mu-1,1}(\mu-1,1) \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + A'_{0,\nu-1}(0,\nu-1) + A'_{1,\nu-1}(1,\nu-1) \dots + A'_{\mu-1,\nu-1}(\mu-1,\nu-1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^2 = {} & A^\alpha_{0,0}(0,0) + A''_{1,0}(1,0) \dots + A''_{\mu-1,0}(\mu-1,0) \\ & + A''_{0,1}(0,1) + A''_{1,1}(1,1) \dots + A''_{\mu-1,1}(\mu-1,1) \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ & + A''_{0,\nu-1}(0,\nu-1) + A''_{1,\cdot-1}(1,\nu-1) \dots + A''_{\mu-1,\nu-1}(\mu-1,\nu-1), \end{aligned}$$

cet. cet.,

ac generaliter:

$$
\begin{aligned}
11)\quad u_m = {} & A^{(m)}_{0,0}(0,0) + A^{(m)}_{1,0}(1,0) + A^{(m)}_{2,0}(2,0) \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,0}(\mu-1,0) \\
& + A^{(m)}_{0,1}(0,1) + A^{(m)}_{1,1}(1,1) + A^{(m)}_{2,1}(2,1) \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,1}(\mu-1,1) \\
& + A^{(m)}_{0,2}(0,2) + A^{(m)}_{1,2}(1,2) + A^{(m)}_{2,2}(2,2) \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,2}(\mu-1,2) \\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
& + A^{(m)}_{0,\nu-1}(0,\nu-1) + A^{(m)}_{1,\nu-1}(1,\nu-1) + A^{(m)}_{2,\nu-1}(2,\nu-1) \ldots\ldots \\
& \qquad \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,\nu-1}(\mu-1,\nu-1);
\end{aligned}
$$

de qua formula generali incognitarum omnium obtineantur valores, ponendo loco m numeros $1, 2, 3, \ldots\ldots \mu\nu$.

Statuamus denique, posito

$$u_1 = x_1^\gamma y_1^\delta, \qquad u_2 = x_2^\gamma y_2^\delta, \qquad \ldots\ldots \qquad u_{\mu\nu} = x_{\mu\nu}^\gamma y_{\mu\nu}^\delta,$$

expressionem (α, β) fieri $(\alpha, \beta)_{\gamma,\delta}$, unde

$$\frac{x_1^{\alpha+\gamma} y_1^{\beta+\delta}}{R_1} + \frac{x_2^{\alpha+\gamma} y_2^{\beta+\delta}}{R_2} \ldots\ldots + \frac{x_{\mu\nu}^{\alpha+\gamma} y_{\mu\nu}^{\beta+\delta}}{R_{\mu\nu}} = (\alpha, \beta)_{\gamma,\delta},$$

quae expressio cum tantum pendeat a summis $\alpha+\gamma$, $\beta+\delta$, statuatur:

$$(\alpha, \beta)_{\gamma,\delta} = a_{\alpha+\gamma,\beta+\delta},$$

sive sit:

$$12)\quad \frac{x_1^p y_1^q}{R_1} + \frac{x_2^p y_2^q}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{x_{\mu\nu}^p y_{\mu\nu}^q}{R_{\mu\nu}} = a_{p,q}.$$

Quibus statutis, erit e (11):

$$
\begin{aligned}
13)\quad x_m^\gamma y_m^\delta = {} & A^{(m)}_{0,0}\, a_{\gamma,\delta} + A^{(m)}_{1,0}\, a_{\gamma+1,\delta} + A^{(m)}_{2,0}\, a_{\gamma+2,\delta} \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,0}\, a_{\gamma+\mu-1,\delta} \\
& + A^{(m)}_{0,1}\, a_{\gamma,\delta+1} + A^{(m)}_{1,1}\, a_{\gamma+1,\delta+1} + A^{(m)}_{2,1}\, a_{\gamma+2,\delta+1} \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,1}\, a_{\gamma+\mu-1,\delta+1} \\
& + A^{(m)}_{0,2}\, a_{\gamma,\delta+2} + A^{(m)}_{1,2}\, a_{\gamma+1,\delta+2} + A^{(m)}_{2,2}\, a_{\gamma+2,\delta+2} \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,2}\, a_{\gamma+\mu-1,\delta+2} \\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
& + A^{(m)}_{0,\nu-1}\, a_{\gamma,\delta+\nu-1} + A^{(m)}_{1,\nu-1}\, a_{\gamma+1,\delta+\nu-1} + A^{(m)}_{2,\nu-1}\, a_{\gamma+2,\delta+\nu-1} \ldots\ldots \\
& \qquad \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-1,\nu-1}\, a_{\gamma+\mu-1,\delta+\nu-1}.
\end{aligned}
$$

Designantibus γ, δ numeros integros positivos, incluso zero, sit $\gamma+\delta \leqq \nu$; sit autem, ut supra, $\nu < \mu$. Quibus positis, statuamus iam, in aequationibus (13) evanescere quantitates omnes $a_{p,q}$, in quibus $p+q < \mu+\nu-2$. Unde aequatio (13), si $\gamma+\delta = \nu$, hanc formam induit, in qua series horizontales inverso ordine exhibuimus:

$$
\begin{aligned}
14)\quad x_m^{\nu-\delta} y_m^\delta = {} & A^{(m)}_{\mu-1,0}\, a_{\mu+\nu-\delta-1,\delta} + A^{(m)}_{\mu-2,0}\, a_{\mu+\nu-\delta-2,\delta} \\
& + A^{(m)}_{\mu-1,1}\, a_{\mu+\nu-\delta-1,\delta+1} + A^{(m)}_{\mu-2,1}\, a_{\mu+\nu-\delta-2,\delta+1} + A^{(m)}_{\mu-3,1}\, a_{\mu+\nu-\delta-3,\delta+1} \\
& + A^{(m)}_{\mu-1,2}\, a_{\mu+\nu-\delta-1,\delta+2} + A^{(m)}_{\mu-2,2}\, a_{\mu+\nu-\delta-2,\delta+2} \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-4,2}\, a_{\mu+\nu-\delta-4,\delta+2} \\
& \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
& + A^{(m)}_{\mu-1,\nu-1}\, a_{\mu+\nu-\delta-1,\delta+\nu-1} + A^{(m)}_{\mu-2,\nu-1}\, a_{\mu+\nu-\delta-2,\delta+\nu-1} \ldots\ldots \\
& \qquad \ldots\ldots + A^{(m)}_{\mu-\nu-1,\nu-1}\, a_{\mu-\delta-1,\delta+\nu-1},
\end{aligned}
$$

qua in formula δ valores omnes induere potest inde a 0 usque ad ν. Generaliter, si $a_{p,q}=0$, quoties $p+q<\mu+\nu-2$, aequatio (13), seriebus et horizontalibus et verticalibus inverso ordine exhibitis, haec evadit:

$$
\begin{aligned}
15)\quad x_m^\gamma y_m^\delta = & A^{(m)}_{\mu-1,\nu-1}a_{\gamma+\mu-1,\delta+\nu-1}+A^{(m)}_{\mu-2,\nu-1}a_{\gamma+\mu-2,\delta+\nu-1}\ldots+A^{(m)}_{\mu-\gamma-\delta-1,\nu-1}a_{\mu-\delta-1,\delta+\nu-1}\\
&+A^{(m)}_{\mu-1,\nu-2}a_{\gamma+\mu-1,\delta+\nu-2}+A^{(m)}_{\mu-2,\nu-2}a_{\gamma+\mu-2,\delta+\nu-2}\ldots+A^{(m)}_{\mu-\gamma-\delta,\nu-2}a_{\mu-\delta,\delta+\nu-2}\\
&+A^{(m)}_{\mu-1,\nu-3}a_{\gamma+\mu-1,\delta+\nu-3}+A^{(m)}_{\mu-2,\nu-3}a_{\gamma+\mu-2,\delta+\nu-3}\ldots+A^{(m)}_{\mu-\gamma-\delta+1,\nu-3}a_{\mu-\delta+1,\delta+\nu-3}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+A^{(m)}_{\mu-1,\nu-\gamma-\delta}a_{\gamma+\mu-1,\nu-\gamma}+A^{(m)}_{\mu-2,\nu-\gamma-\delta}a_{\gamma+\mu-2,\nu-\gamma}+A^{(m)}_{\mu-1,\nu-\gamma-\delta-1}a_{\gamma+\mu-1,\nu-\gamma-1}.
\end{aligned}
$$

Si $\gamma+\delta=\nu$, in formula antecedente reiiciendus est terminus postremus, in quo ipsius $A^{(m)}$ index posterior eo casu negativus evaderet; qua de re casum illum formula (14) seorsim exhibuimus.

Observationes bis adiungimus sequentes. Singuli expressionis generalis (15) termini forma gaudent

$$A_{p,q}\,a_{\gamma+p,\delta+q},$$

ubi $p\leqq\mu-1$, $q\leqq\nu-1$, simulque $\gamma+p+\delta+q\geqq\mu+\nu-2$, ideoque $p+q\geqq\mu+\nu-2-\gamma-\delta$. Termines $A_{p,q}$, qui conditionibus illis satisfaciunt, omnes simul continet aequatio (14), eorumque numerus est

$$2+3+4+\ldots.+\nu+1=\frac{\nu.(\nu+3)}{2}.$$

Sed numerus aequationum inter terminos illos linearium, quae e forma generali (15) obtinentur, est $\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2}=\frac{\nu(\nu+3)}{2}+1$; tribuimus enim ipsis γ,δ valores omnes, pro quibus $\gamma+\delta\leqq\nu$. Unde terminos omnes $A^{(m)}$ ex aequationibus illis eliminare licet; quo facto obtinetur una aequatio inter terminos $x_m^\gamma y_m^\delta$ linearis. Quae aequatio cum prorsus eadem maneat pro omnibus ipsius m valoribus $1, 2, 3, \ldots. \mu\nu$; habetur aequatio inter x, y ordinis ν^{ti}, cui $\mu\nu$ systemata valorum $x=x_1$, $y=y_1$; $x=x_2$, $y=y_2$; .... $x=x_{\mu\nu}$, $y=y_{\mu\nu}$ satisfaciunt.

In formulis (13) supposuimus evanescere $a_{p,q}$, quoties $p+q\leqq\mu+\nu-3$; in formulis autem illis p, q gaudent forma

$$p=\gamma+p',\qquad q=\delta+q',$$

ubi p', q', γ, δ positivi, atque $\gamma+\delta\leqq\nu$, $p'\leqq\mu-1$, $q'\leqq\nu-1$. Unde valor ipsius q maximus est $2\nu-1$. Qua de re, ut obtineantur aequationes (13), sive ut singula systemata valorum $x=x_m$, $y=y_m$ satisfaciant aequationi ν^{ti} ordinis (quod e (13) sequi vidimus) poscebantur aequationes sequentes:

nam μ^{ti} ordinis determinari per puncta $\frac{(\mu+1)(\mu+2)}{2} - 1 = \frac{\mu(\mu+3)}{2}$. Si $\nu = 2$, sequitur, *quoties $\mu \geqq 2$, curvam intersectionis datae superficiei secundi ordinis cum superficie μ^{ti} ordinis determinari per puncta illius $\mu(\mu+2)$*; cet. cet. Quod theorema etiam sic proponere convenit:

Quoties $\mu \geqq 2$, in superficie secundi ordinis ex arbitrio acceptis punctis $\mu(\mu+2)$, superficies μ^{ti} ordinis, quas per ea ducere licet, omnes curvam intersectionis cum superficie secundi ordinis eandem habent;

et generaliter:

Quoties $\mu \geqq \nu$, in superficie ν^{ti} ordinis ex arbitrio acceptis punctis

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3} - \frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3} - 1,$$

superficies μ^{ti} ordinis, quas per ea ducere licet, omnes cum superficie ν^{ti} ordinis eandem curvam intersectionis habent.

6.

Investigemus iam conditiones, quae locum habere debeat inter puncta intersectionis trium superficierum dati ordinis. Sit primum omnibus tribus idem ordo n; eadem methodo, qua antecedentibus usi sumus, facile patet, datis punctis

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 3,$$

superficies n^{ti} ordinis per ea transeuntes omnes forma gaudere

$$aU + bV + cW = 0,$$

designantibus a, b, c constantes, atque U, V, W expressiones n^{ti} ordinis, per coordinatas punctorum datorum determinatas. Unde puncta intersectionis trium superficierum, quae per puncta illa transeunt, posita esse debent in tribus superficiebus, quarum aequationes sunt

$$U = 0, \qquad V = 0, \qquad W = 0;$$

ideoque *n puncta, in quibus tres superficies n^{ti} ordinis se intersecant, determinata sunt omnia per numerum eorum*

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} - 3,$$

sive *e n^3 punctis intersectionis trium superficierum n^{ti} ordinis, numerus*

$$n^3 - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3} + 3 = \frac{(n-1)(5n^2-n-12)}{2.3}$$

per reliqua determinatus est. Ita notum est, e 8 punctis, in quibus tres

superficies secundi ordinis se intersecare possunt, unum per reliqua septem determinata esse.

Theorema antecedens etiam sic exhiberi potest:

Datis n^3 systematis valorum trium incognitarum, ut tribus aequationibus n^{ti} ordinis per ea satisfieri possit, inter valores illos incognitarum conditiones

$$\frac{(n-1)(5n^2-n-12)}{2}$$

locum habere debent.

Ponamus iam duabus superficiebus esse ordinem ν, tertiae ordinem μ, sitque $\mu > \nu$. Iisdem considerationibus, quibus supra usi sumus, sequeretur, ope duarum aequationum ν^{ti} ordinis, in aequatione μ^{ti} ordinis deleri posse terminos

$$2 . \frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3}.$$

Sed hoc iustum tantum est, si $\mu-\nu<\nu$. Sint enim $\varphi=0$, $\psi=0$ datae aequationes ν^{ti} ordinis; u, v duae functiones $(\mu-\nu)^{\text{ti}}$ ordinis, quarum coëfficientes arbitrariae sint; sit $f=0$ aequatio μ^{ti} ordinis. Ipsi f addi potest expressio $u\varphi+v\psi$, quo facto in expressione $f+u\varphi+v\psi$ tot termini deleri possunt, quod continet $u\varphi+v\psi$ constantes arbitrarias. Sed quoties $\mu-\nu\geqq\nu$, expressio $u\varphi+v\psi$ non mutatur, si loco u ponitur $u+\lambda\psi$, loco v ponitur $v-\lambda\varphi$, designante λ expressionem ordinis $\mu-2\nu$ quamcunque seu cuius coëfficientes et ipsae arbitrariae sunt. Unde a numero coëfficientium ipsarum u, v detrahi debet numerus coëfficientium expressionis λ, ut obtineatur verus numerus quantitatum, quae in expressione $u\varphi+v\psi$ arbitrariae sunt, hoc est, quae ad minorem numerum non revocari possunt. Unde sequitur, *si $\mu\geqq 2\nu$, numerum terminorum, qui in expressione μ^{ti} ordinis ope duarum aequationum ν^{ti} ordinis deleri possint, esse*

$$\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}-\frac{(\mu-2\nu+1)(\mu-2\nu+2)(\mu-2\nu+3)}{2.3},$$

ideoque ope aequationum illarum expressionem μ^{ti} ordinis ad numerum terminorum

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}-\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}+\frac{(\mu-2\nu+1)(\mu-2\nu+2)(\mu-2\nu+3)}{2.3}$$
$$=\nu^2(\mu-\nu+2)$$

revocari posse. Si $\mu<2\nu$, numerus terminorum, qui in expressione μ^{ti} ordinis ope duarum aequationum ν^{ti} ordinis deleri potest, erit

$$\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3},$$

unde sequitur, *si* $\mu \geqq \nu$, $\mu < 2\nu$, *expressionem* μ^{ti} *ordinis ope duarum aequationum* ν^{ti} *ordinis ad numerum terminorum*

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}-\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}$$

$$=\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}$$

revocari posse.

E propositione antecedente videmus, numerum $\nu^2(\mu-\nu+2)$ etiam valere, si $\mu \geqq 2\nu-3$.

Ex antecedentibus deducitur propositio haec:

Sit $\mu \geqq \nu$, *data curva intersectionis duarum superficierum* ν^{ti} *ordinis, puncta in ea posita, per quae superficiem* μ^{ti} *ordinis ducere licet, per ipsam curvam non transeuntem, non plura ex arbitrio accipi possunt, si* $\mu \geqq 2\nu-3$, *quam*

$$\nu^2(\mu-\nu+2)-1,$$

si $\mu < 2\nu$, *non plura quam*

$$\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-1;$$

et vice versa; si $\mu \geqq 2\nu-3$, *per quaelibet eius puncta*

$$\nu^2(\mu-\nu+2)-1;$$

si $\mu < 2\nu$, *per quaelibet eius puncta*

$$\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-1$$

ducere licet superficiem μ^{ti} *ordinis, quae per ipsam curvam non transit.*

Si $\nu=2$, sequitur e proposition eantecedente: *si curva intersectionis duarum superficierum secundi ordinis per superficiem* μ^{ti} *ordinis, ubi* $\mu \geqq 2$, *in* 4μ *punctis secetur, unum ex his per reliqua* $4\mu-1$ *determinatum esse.*

7.

Vidimus supra, intersectionem duarum superficierum ν^{ti} ordinis determinari per puncta

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2}-2;$$

unde si p isto numero maior est, ut p puncta in intersectione duarum

superficierum ν^{ti} ordinis posita esse possint, inter coordinatas earum locum habere debent conditiones

$$2\left[p-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+2\right].$$

Statuamus iam, tres superficies, duas ν^{ti}, tertiam μ^{ti} ordinis, ubi $\mu>\nu$, se mutuo intersecare in $\nu^2\mu$ punctis; sitque

1) $\mu\geqq 2\nu-3$;

puncta illa $\nu^2\mu$ e §. antec. omnia determinata erunt per $\nu^2(\mu-\nu+2)-1$ ex eorum numero, in intersectione duarum superficierum ν^{ti} ordinis posita; inter quorum igitur coordinatas intercedere debent conditiones

$$2\left[\nu^2(\mu-\nu+2)-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+1\right],$$

unde *numerus totus conditionum, quae inter coordinatas omnium $\nu^2\mu$ punctorum locum habere debent, fit:*

$$3[\nu^2\mu-\nu^2(\mu-\nu+2)+1]+2\left[\nu^2(\mu-\nu+2)-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+1\right]$$
$$=2\nu^2(\mu-2\nu)+(\nu-1)\frac{(14\nu^2+2\nu-9)}{3}.$$

Sit

2) $\mu<2\nu$;

puncta $\nu^2\mu$ omnia determinata erunt per

$$\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-1$$

ex eorum numero, in intersectione duarum superficierum ν^{ti} ordinis posita; inter quorum igitur coordinatas intercedere debent relationes

$$2\left[\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+1\right],$$

unde *numerus totus conditionum, quae inter $\nu^2\mu$ punctorum illorum coordinatas locum habere debent, fit:*

$$3\left[\nu^2\mu-\nu^2(\mu-\nu+2)-\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}+1\right]$$
$$+2\left[\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+1\right]$$
$$=3\nu^2\mu-\nu^2(\mu-\nu+2)-\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}+5$$
$$=3\nu^2\mu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}+5.$$

Si $\mu=\nu$, fit

$$\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-1=\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}-3;$$

qui numerus punctorum semper in curva intersectionis duarum superficierum ν^{ti} ordinis iacere potest, quippe quae $\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3.3}-2$ punctis determinatur. Quo igitur casu reiici debet conditionum numerus

$$2\left[\nu^2(\mu-\nu+2)+\frac{(2\nu-\mu-1)(2\nu-\mu-2)(2\nu-\mu-3)}{2.3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+1\right]=-2.$$

Unde, si $\mu=\nu$, *duobus* augeri debet totus numerus conditionum antecc. propositus,

$$3\nu^2\mu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{3}+5$$

$$=3\nu^3-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2}+7=\frac{5\nu^3-6\nu^2-11\nu+8}{2}.$$

Quod, si loco n scribimus ν, bene congruit cum numero supra invento,

$$\frac{(\nu-1)(5\nu^2-\nu-12)}{2}=\frac{5\nu^3-6\nu^2-11\nu+12}{2},$$

qui numero antecedente duobus maior est.

8.

Consideremus iam casum, quo una superficies sit ν^{ti} ordinis, duae μ^{ti} ordinis, ubi rursus $\mu\geqq\nu$. Cum in aequatione superficiei μ^{ti} ordinis per aequationem superficiei ν^{ti} ordinis deleri possint termini

$$\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3},$$

facile patet per considerationes antecedentibus similes, *si $\mu\geqq\nu$, in superficie ν^{ti} ordinis ex arbitrio assumi posse*

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}-\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3}-2$$

puncta nec plura, per quae ducatur curva intersectionis duarum superficierum μ^{ti} ordinis, quae non tota in superficie ν^{ti} ordinis iaceat.

Hinc sequitur, *ut $\mu^2\nu$ puncta, ubi $\mu>\nu$, considerari possint ut intersectiones communes superficiei ν^{ti} ordinis cum duabus superficiebus μ^{ti} ordinis, inter coordinatas eorum intercedere debere conditiones*

$$3\left[\mu^2\nu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3}+2\right]$$

$$+\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3}-\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}-1$$

$$=3\mu^2\nu-\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{3}+\frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{3}-\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3}+5$$

$$=\mu\nu(2\mu+\nu-4)-\frac{\nu^3-2\nu^2+11\nu-8}{2},$$

qui numerus, si $\mu=\nu$, duobus augeri debet.

9.

Sit denique trium superficierum neutra eiusdem ordinis; sive sint tres superficies μ^{ti}, ν^{ti}, ϖ^{ti} ordinis, ubi $\mu > \nu > \varpi$; quae superficies se in $\mu\nu\varpi$ punctis intersecent. Puncta $\mu\nu\varpi$ ut in superficie ϖ^{ti} ordinis iaceant, conditionibus opus est

$$\mu\nu\varpi - \frac{(\varpi+1)(\varpi+2)(\varpi+3)}{2.3} + 1.$$

Aequatio superficiei ν^{ti} ordinis per aequationem superficiei ϖ^{ti} ordinis revocari potest ad terminos

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3} - \frac{(\nu-\varpi+1)(\nu-\varpi+2)(\nu-\varpi+3)}{2.3};$$

cuiusmodi aequationi ut satisfaciant coordinatae $\mu\nu\varpi$ punctorum, conditiones habentur

$$\mu\nu\varpi - \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3} + \frac{(\nu-\varpi+1)(\nu-\varpi+2)(\nu-\varpi+3)}{2.3} + 1.$$

Iam quod superficiem μ^{ti} ordinis attinet, destinguendi sunt duo casus.

Sit

1) $\mu \geqq \nu + \varpi$;

considerationibus iisdem atque supra factis, probatur, aequationem μ^{ti} ordinis per aequationes ν^{ti} et ϖ^{ti} ordinis revocari posse ad terminos

$$\frac{(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)}{2.3} - \frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)(\mu-\nu+3)}{2.3} - \frac{(\mu-\varpi+1)(\mu-\varpi+2)(\mu-\varpi+3)}{2.3}$$
$$+ \frac{(\mu-\nu-\varpi+1)(\mu-\nu-\varpi+2)(\mu-\nu-\varpi+3)}{2.3} = \frac{\nu\varpi(2\mu-\nu-\varpi+4)}{2},$$

cuiusmodi aequationi ut satisfacere possint coordinatae $\mu\nu\varpi$ punctorum, conditiones habentur

$$\mu\nu\varpi - \frac{\nu\varpi(2\mu-\nu-\varpi+4)}{2} + 1 = \frac{\nu\varpi(\nu+\varpi-4)}{2} + 1.$$

Unde *fit totus numerus conditionum, quibus satisfacere debent* $\mu\nu\varpi$ *puncta, ut considerari possint tamquam intersectiones communes trium superficierum* μ^{ti}, ν^{ti}, ϖ^{ti} *ordinis, quae curvam intersectionis communem non habent, siquidem* $\nu > \varpi$, $\mu \geqq \nu + \varpi$,

$$2\mu\nu\varpi - \frac{(\varpi+1)(\varpi+2)(\varpi+3)}{2.3} - \frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{2.3} + \frac{(\nu-\varpi+1)(\nu-\varpi+2)(\nu-\varpi+3)}{2.3}$$
$$+ \frac{\nu\varpi(\nu+\varpi-4)}{2} + 3 = 2\mu\nu\varpi + \nu\varpi^2 - 4\nu\varpi - 2\varpi^2 - \frac{(\varpi-1)(\varpi-2)(\varpi-3)}{3}.$$

Qui numerus, si $\nu = \varpi$, unitate augeri debet, ut cum numero, quem supra eo casu invenimus, conveniat. Ac reapse, si $\nu = \varpi$, aequatio ϖ^{ti} or-

dinis per aequationem ν^{ti} ordinis ad numerum terminorum unitate minorem, sc. $\frac{(\varpi+1)(\varpi+2)(\varpi+3)}{2.3}-1$ revocari potest, ideoque numerus conditionum, ut coordinatae $\mu\nu\varpi$ punctorum eiusmodi aequationi satisfacere possint, fit

$$\mu\nu\varpi-\frac{(\varpi+1)(\varpi+2)(\varpi+3)}{2.3}+2,$$

qui est unitate maior atque supra assignatus.

Sit

2) $\mu<\nu+\varpi$;

omnia eadem atque casu priore manent, nisi quod reiici debet numerus

$$\frac{(\mu-\nu-\varpi+1)(\mu-\nu-\varpi+2)(\mu-\nu-\varpi+3)}{2.3}.$$

Unde *fit numerus conditionum*

$$2\mu\nu\varpi+\nu^2\varpi-4\nu\varpi-2\varpi^2-\frac{(\varpi+1)(\varpi+2)(\varpi+3)}{3}$$
$$-\frac{(\nu+\varpi-\mu-1)(\nu+\varpi-\mu-2)(\nu+\varpi-\mu-3)}{2.3}.$$

Qui numerus, si $\mu=\nu$ aut $\nu=\varpi$ *unitate*, si $\mu=\nu=\varpi$, *tribus* augeri debet.

Si $\mu\geqq\nu+\varpi$, numerus punctorum, per quae superficiem μ^{ti} ordinis ducere licet, quae in curva intersectionis duarum superficierum ν^{ti} et ϖ^{ti} ordinis ex arbitrio accipere licet, est

$$\nu\varpi\left(\mu+2-\frac{\nu+\varpi}{2}\right)-1.$$

Si $\mu>\nu$, $\mu>\varpi$, sed $\mu<\nu+\varpi$, fit idem numerus

$$\nu\varpi\left(\mu+2-\frac{\nu+\varpi}{2}\right)+\frac{(\nu+\varpi-\mu-1)(\nu+\varpi-\mu-2)(\nu+\varpi-\mu-3)}{2.3}-1.$$

10.

Sint $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ aequationes μ^{ti}, ν^{ti}, ϖ^{ti} ordinis, inter tres incognitas x, y, z propositae, ac ponamus, tribus illis aequationibus satisfieri per $\mu\nu\varpi$ systemata valorum incognitarum $x=x_m$, $y=y_m$, $z=z_m$, ipsi m tributis valoribus 1, 2, 3, ... $\mu\nu\varpi$. Sit porro

$$R=\frac{df}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dz}-\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\psi}{dy}\right)+\frac{df}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{d\psi}{dx}-\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dz}\right)+\frac{df}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dy}\cdot\frac{d\psi}{dx}\right),$$

ac designemus per R_m valorem ipsius R, posito simul $x=x_m$, $y=y_m$. Quibus positis, demonstrari potest per methodum similem atque pro duabus incognitis adhibuimus, fieri

$$\frac{x_1^a y_1^b z_1^c}{R_1}+\frac{x_2^a y_2^b z_2^c}{R_2}+\ldots+\frac{x_{\mu\nu\varpi}^a y_{\mu\nu\varpi}^b z_{\mu\nu\varpi}^c}{R_{\mu\nu\varpi}}=0,$$

designantibus a, b, c numeros integros positivos, quorum summa

$$a+b+c \leqq \mu+\nu+\varpi-4.$$

Numerus harum aequationum, qui pro diversis ipsorum a, b, c valoribus obtinetur, est

$$\frac{(\mu+\nu+\varpi-3)(\mu+\nu+\varpi-2)(\mu+\nu+\varpi-1)}{2.3}=A.$$

Multiplicando aequationes $f=0$, $\varphi=0$, $\psi=0$ respective per singulos terminos expressionum, quae respective non superant $(\nu+\varpi-4)^{\text{tum}}$, $(\varpi+\mu-4)^{\text{tum}}$, $(\mu+\nu-4)^{\text{tum}}$ ordinem, e tribus aequationibus propositis eruuntur aliae numero

$$\frac{(\nu+\varpi-1)(\nu+\varpi-2)(\nu+\varpi-3)}{2.3}+\frac{(\varpi+\mu-1)(\varpi+\mu-2)(\varpi+\mu-3)}{2.3}$$
$$+\frac{(\mu+\nu-1)(\mu+\nu-2)(\mu+\nu-3)}{2.3}=B,$$

in quibus singuli termini dimensionem $\mu+\nu+\varpi-4$ non superant. Quarum aequationum unaquaque efficitur, ut e toto numero aequationum

$$\frac{x_1^a y_1^b z_1^c}{R_1}+\frac{x_2^a y_2^b z_2^c}{R_2}+\ldots+\frac{x_{\mu\nu\varpi}^a y_{\mu\nu\varpi}^b z_{\mu\nu\varpi}^c}{R_{\mu\nu\varpi}}=u_{a,b,c}=0$$

una ad reliquos revocetur. Sed B aequationes illae non a se omnes independentes sunt, sed pars novas non suppeditat relationes inter ipsarum x, y potestas earumque producta. Sit enim λ terminus expressionis, quae non superat $(\mu-4)^{\text{tum}}$ ordinem, aequatio

$$\lambda.\varphi\psi=0$$

et ex aequatione $\varphi=0$, et ex aequatione $\psi=0$ provenit. Unde de numero B deduci debet numerus

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3}$$

aequationum, quae duplici modo inveniuntur; eodemque modo videmus, ex aequationibus $\psi=0$, $f=0$ easdem provenire $\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.3}$ aequationes; ex aequationibus $f=0$, $\varphi=0$ easdem provenire $\frac{(\varpi-1)(\varpi-2)(\varpi-3)}{2.3}$ aequationes. Qua de re, posito

$$\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.3}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{2.3}+\frac{(\varpi-1)(\varpi-2)(\varpi-3)}{2.3}=C,$$

tantum numerari debent $B-C$ aequationes, quarum unaquaque una ex

A aequationibus $u_{a,b,c}=0$ ad reliquas revocetur. Quae igitur omnes revocantur ad numerum earum

$$A-B+C=\mu\nu\varpi-1.$$

Unde patet, ipsis R_m seu earum rationibus per $\mu\nu\varpi-1$ ex aequationibus $u_{a,b,c}=0$ determinatis, reliquas

$$\frac{(\mu+\nu+\varpi-1)(\mu+\nu+\varpi-2)(\mu+\nu+\varpi-3)}{2.3}-\mu\nu\varpi+1$$

ex iis sponte fluere; sive, quod novi doceant aequationes $u_{a,b,c}=0$, tantum spectare significationem quantitatum R_m.

Eliminatis R_m ex aequationibus $u_{a,b,c}=0$, habentur inter ipsas x_m, y_m, z_m aequationes

$$\frac{(\mu+\nu+\varpi-1)(\mu+\nu+\varpi-2)(\mu+\nu+\varpi-3)}{2.3}-\mu\nu\varpi+1=D,$$

quae nonnisi inde proveniunt, quod $\mu\nu\varpi$ systemata valorum $x=x_m$, $y=y_m$, $z=z_m$ satisfaciant tribus aequationibus μ^{ti}, ν^{ti}, ϖ^{ti} ordinis. Si $\mu=\nu=\varpi$, fit

$$D=\frac{\mu-1}{2}.(3\mu-1)(3\mu-2)-(\mu-1)(\mu^2+\mu+1)=\frac{(\mu-1)(7\mu^2-11\mu)}{2}.$$

Sed supra per alias considerationibus invenimus, numerum conditionum a se independentium, quem per E designemus, esse

$$E=\frac{(\mu-1)(5\mu^2-\mu-12)}{2},$$

Unde e D conditionibus numerus

$$D-E=\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2}$$

e reliquis sponte fluit; *sive si* $\mu=\nu=\varpi$, *ex aequationibus* $u_{a,b,c}=0$ *numerus* $\frac{(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2}$ *reliquis continetur seu conditiones novas non suppeditat.*

Eodem modo, si μ, ν, ϖ inter se diversi sunt, per comparationem numeri D cum numero conditionum a se independentium, quem pro singulis casibus per alias considerationes supra invenimus, eruis numerum aequationum $u_{a,b,c}=0$, qui reliquis continetur seu conditiones novas non suggerit.

Antecedentia pro tribus incognitis breviter adnotasse sufficiat. Nec non disquisitiones antecedentes ad numerum quemlibet incognitarum extendi possunt.

19.

Observationes geometricae.

(Auctore C. G. J. Jacobi, prof. ord. math. Regiom.)

Designantibus x, y, z atque p, q, r coordinatas orthogonales, ad duo diversa coordinatarum systemata relatas, aliae per alias exprimuntur formulis notissimis:

$$1.\quad \begin{cases} x = f + \alpha p + \beta q + \gamma r, \\ y = g + \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, \\ z = h + \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r, \end{cases}$$

quibus in aequationibus coëfficientes novem α, β cet. satisfaciunt relationibus viginti duabus:

$$2.\quad \begin{cases} \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 1, & \alpha\alpha + \alpha'\alpha' + \alpha''\alpha'' = 1, \\ \alpha'\alpha' + \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = 1, & \beta\beta + \beta'\beta' + \beta''\beta'' = 1, \\ \alpha''\alpha'' + \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' = 1, & \gamma\gamma + \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = 1, \\ \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, & \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, & \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, & \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0, \\ \beta'\gamma'' - \beta''\gamma' = \varepsilon\alpha, \quad \gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha' = \varepsilon\beta, & \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \varepsilon\gamma, \\ \beta''\gamma - \beta\gamma'' = \varepsilon\alpha', \quad \gamma''\alpha - \gamma\alpha'' = \varepsilon\beta', & \alpha''\beta - \alpha\beta'' = \varepsilon\gamma', \\ \beta\gamma' - \beta'\gamma = \varepsilon\alpha'', \quad \gamma\alpha' - \gamma'\alpha = \varepsilon\beta'', & \alpha\beta' - \alpha'\beta = \varepsilon\gamma'', \\ \alpha(\beta'\gamma'' - \beta''\gamma') + \beta(\gamma'\alpha'' - \gamma''\alpha') + \gamma(\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') = \varepsilon, \end{cases}$$

designante ε aut $+1$ aut -1. Sed multum interest, sive hic sive ille valor ipsi ε conveniat.

Si idem corpus in duabus positionibus diversis consideramus, quod exempli gratia in theoria motus corporum rigidorum fit, notum est, constantes aequationum (1.) ita semper determinari posse, ut si punctum corporis in altera positione collocati coordinatas habeat x, y, z, corpore in altera positione collocato, eiusdem eius puncti coordinatae fiant p, q, r. Sed vice versa, si singula puncta duorum corporum ita sibi respondeant, ut designantibus x, y, z coordinatas puncti alterius corporis, punctum alterius corporis ei respondens coordinatas habeat p, q, r, generaliter dici non potest, corpora eadem esse sive congruentia; sed siquidem $\varepsilon = +1$, erunt duo corpora *congruentia*, si vero $\varepsilon = -1$, erunt *symmetrica*.

Quoties alterum coordinatarum systema in positionem alterius traducere licet, ita ut axes coordinatarum x, y, z respective cum axibus coordinatarum p, q, r coincidant, semper erit $\varepsilon = +1$. Quod est videre in formulis *Eulerianis* (v. Diar. *Crell.* V. II. pag. 188):

$$3.\quad \begin{cases} x = (\cos\varphi\sin^2 a + \cos^2 a)p + (\sin\varphi\cos c + \cos a\cos b(1-\cos\varphi))q \\ \qquad + (-\sin\varphi\cos b + \cos a\cos c(1-\cos\varphi))r, \\ y = (-\sin\varphi\cos c + \cos b\cos a(1-\cos\varphi))p + (\cos\varphi\sin^2 b + \cos^2 b)q \\ \qquad + (\sin\varphi\cos a + \cos b\cos c(1-\cos\varphi))r, \\ z = (\sin\varphi\cos b + \cos a\cos c(1-\cos\varphi))p \\ \qquad + (-\sin\varphi\cos a + \cos b\cos c(1-\cos\varphi))q + (\cos\varphi\sin^2 c + \cos^2 c)r^{*)}, \end{cases}$$

in quibus a, b, c designant angulos, quos cum axibus coordinatarum format axis, circa quem rotare debet alterum systema, ut axes coordinatarum p, q, r respective in positionem axium coordinatarum x, y, z perveniant, et φ angulum rotationis.

Dato corpore, formatur symmetricum, si pro omnibus eius punctis aut uni coordinatae aut omnibus tribus valores oppositi tribuuntur, sive etiam si binarum coordinatarum valores inter se permutantur. Contra habetur congruens, si duabus coordinatis valores oppositi tribuuntur, vel si valores ipsarum x, y, z respective cum valoribus ipsarum y, z, x sive cum valoribus ipsarum z, x, y commutantur.

Notum est, posito mx, my, mz loco x, y, z haberi corpus simile; sed hic non licet, quod in figura plana, ut ipsi m valores etiam negativi tribuantur; tum enim prodiret corpus symmetrici simile.

Demonstravit olim *Eulerus* in commentatione „*de centro similitudinis*," propositis duobus corporibus similibus semper dari punctum utrique commune seu sibi ipsum respondens, quod centrum similitudinis vocavit, et quod adnotavit ea gaudere proprietate, ut duo corpora ex eo visa aspectum similem offerant; porro dari lineam et planum ei perpendiculare, per punctum illud transeuntia, quae et ipsa perinde ad utrumque corpus pertineant. Ut, proposite corpore, formetur alterum eius simile in positione quacunque, cuilibet puncto corporis propositi, cuius coor-

---

*) Formulas illas etiam hoc modo repraesentare licet:

$$\begin{aligned} x &= \cos\varphi . p + (1-\cos\varphi)(\cos a . p + \cos b . q + \cos c . r)\cos a + \sin\varphi(\cos c . q - \cos b . r), \\ y &= \cos\varphi . q + (1-\cos\varphi)(\cos a . p + \cos b . q + \cos c . r)\cos b + \sin\varphi(\cos a . r - \cos c . p), \\ z &= \cos\varphi . r + (1-\cos\varphi)(\cos a . p + \cos b . q + \cos c . r)\cos c + \sin\varphi(\cos b . p - \cos a . q). \end{aligned}$$

dinatae sunt x, y, z punctum alterius respondere debet, cuius coordinatae sunt p, q, r, aliis coordinatis per alias determinatis ope aequationum:

$$4. \quad \begin{cases} mx = f + \alpha p + \beta q + \gamma r, \\ my = g + \alpha' p + \beta' q + \gamma' r, \\ mz = h + \alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r; \end{cases}$$

in quibus novem coëfficientes α, β, cet. satisfacere debent aequationibus (2.). Si A, B, C sunt coordinatae centri similitudinis, fieri debet:

$$5. \quad \begin{cases} mA = f + \alpha A + \beta B + \gamma C \\ mB = g + \alpha' A + \beta' B + \gamma' C \\ mC = h + \alpha'' A + \beta'' B + \gamma'' C \end{cases} \quad \text{sive} \quad \begin{cases} -f = (\alpha - m)A + \beta B + \gamma C, \\ -g = \alpha' A + (\beta' - m)B + \gamma' C, \\ -h = \alpha'' A + \beta'' B + (\gamma'' - m)C, \end{cases}$$

quarum aequationum resolutione prodit:

$$6. \quad \begin{cases} A = -\dfrac{[\alpha - m(\beta' + \gamma'') + m^2]f + (\alpha' + \beta m)g + (\alpha'' + \gamma m)h}{(1-m)[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}, \\ B = -\dfrac{(\beta + \alpha' m)f + [\beta' - m(\gamma'' + \alpha) + m^2]g + (\beta'' + \gamma' m)h}{(1-m)[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}, \\ C = -\dfrac{(\gamma + \alpha'' m)f + (\gamma' + \beta'' m)g + [\gamma'' - m(\alpha + \beta') + m^2]h}{(1-m)[1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2]}, \end{cases}$$

quae formulae facile probantur ope aequationum (2.), in quibus, siquidem m quantitas positiva, ponendum est $\varepsilon = +1$. Denominator expressionibus inventis communis, si ipsas α, β cet. per a, b, c, φ, uti in (3.), exhibemus, hanc formam induit:

$$7. \quad (1 - m(\alpha + \beta' + \gamma'' - 1) + m^2)(1-m) = (1 - 2m\cos\varphi + m^2)(1-m),$$

quem videmus evanescere non posse nisi sit $m = 1$, quo casu corpora fiunt congruentia. Quoties autem denominator ille evanescit, aequationibus (6.) generaliter satisfieri nequit, unde videmus, *corpora duo congruentia generaliter nullum habere punctum commune sive quod perinde ad utrumque pertineat*, cumque unicum esse casum, quo duo corpora similia eiusmodi puncto destituta sint.

Si aequationum linearium inter totidem incognitas una e reliquis sponte fluit, et denominator valoribus incognitarum communis evanescit, et habetur aequatio conditionalis inter terminos aequationum constantes, qua fit, ut etiam omnes simul numeratores fractionum, quibus incognitae exhibentur, evanescant. Quae aequatio conditionalis, si statuitur $m = 1$, atque α, β cet. rursus per a, b, c, φ exprimuntur, in aequationibus (5.) fit:

$$8. \quad \cos a . f + \cos b . g + \cos c . h = 0.$$

Quae si locum habet simul cum $m = 1$, tres aequationes (5.) duarum tantum locum tenent, cum tertia e duabus reliquis sponte sequatur. Quo igitur casu puncta duobus corporibus congruentibus communia infinita dantur, in linea recta posita, quam facile patet cum axibus coordinatarum ipsos angulos a, b, c formare. Quae omnia etiam per considerationes faciles geometricas patent.

Si $m = -1$, per formulas (4.) duo habentur corpora symmetrica. Quae igitur omnibus casibus punctum habent utrique commune sive quod perinde ad utrumque pertinet. Cuius coordinatae e (6.), (3.) fiunt:

$$9. \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2}\left[f + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}(\cos b \cdot h - \cos c \cdot g)\right], \\ B = -\frac{1}{2}\left[g + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}(\cos c \cdot f - \cos a \cdot h)\right], \\ C = -\frac{1}{2}\left[h + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2}(\cos a \cdot g - \cos b \cdot f)\right]. \end{cases}$$

Antecedentia adnotatu digna videbantur, quippe quae in libris elementaribus, quantum scis, desiderantur.

Regiom. 14. Oct. 1835.

20.

Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon.

(Vom Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Für irgend eine durch die Winkel φ, ψ, θ bestimmte Stellung des Systemes sei, nach den frühern Bezeichnungen, $V = Ll + Mm + Nn$ das kleinste zusammengesetzte Paar; so wird bekanntlich der Ort der dazu gehörigen Resultante durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\text{1.}\quad \begin{cases} mz - ny = L - lV, \\ nx - lz = M - mV, \\ ly - mx = N - nV. \end{cases}$$

Addirt man die Quadrate dieser Gleichungen, und setzt für l, m, n, L, M, N ihre Werthe aus den Formeln (161.) der Abhandlung 2. dieses Bandes, so ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$\text{2.}\quad (kz - \sin\varphi \sin\theta . y)^2 + (\sin\varphi \sin\theta . x - gz)^2 + (gy - kx)^2 = q^2 g^2 + r^2 k^2.$$

Werden die Kräfte des Systemes um die Richtung der Mittelkraft gedreht, so bleiben g, k, $\sin\varphi \sin\theta$ unverändert. Daher der Satz:

Die sämmtlichen, mit den kleinsten zusammengesetzten Paaren verbundenen, Resultanten, welche eine gemeinschaftliche Richtung haben, bilden einen Kreiscylinder, dessen Axe durch den Centralpunct geht.

Dieser Cylinder bleibt offenbar derselbe, wenn die Cosinus g, k, $\sin\varphi \sin\theta$ entgegengesetzte Zeichen erhalten, also die Kräfte so gedacht werden, daſs die Richtung der Resultante sich in die entgegengesetzte verwandelt. Insbesondere liegen in diesem Cylinder auch die vier einander parallelen Resultanten, welche die Ellipse und Hyperbel treffen, von denen aber jeder nur in dem einen, bei zweien von ihnen dem bei den beiden andern entgegengesetzten, Sinne ein verschwindendes Kräftepaar zukommt.

Es seien a, b, c die Cosinus der Winkel, welche eine beliebige feste Axe mit den Coordinaten bildet. Man setze:

$$3.\quad \begin{cases} ag+bk+c.\sin\varphi\sin\theta = 0, \\ af+bt+c.\cos\varphi\sin\theta = \sin\omega, \\ a\sin\psi\sin\theta+b\cos\psi\sin\theta-c.\cos\theta = \cos\omega. \end{cases}$$

Die Stellung des Systemes ist dann so, daſs die Mittelkraft senkrecht auf der festen Axe steht, während die beiden darauf senkrechten Richtungen, nach welchen die Kräfte zerlegt worden sind, mit der festen Axe die Winkel $\frac{1}{2}\pi-\omega$ und ω einschlieſsen. — Werden die Gleichungen (1.) der Reihe nach zuerst mit $\sin\psi\sin\theta$, $\cos\psi\sin\theta$, $-\cos\theta$, sodann mit f, t, $\cos\varphi\sin\theta$ multiplicirt, und die Producte addirt, so kommt:

$$4.\quad \begin{cases} f.x+t.y+\cos\varphi\sin\theta.z = -qg, \\ \sin\psi\sin\theta.x+\cos\psi\sin\theta.y-\cos\theta.z = -rq. \end{cases}$$

Die Resultante befindet sich in dem Durchschnitte dieser beiden Ebenen. Vermöge der Gleichungen (3.) ist:

$$5.\quad \begin{cases} a = f\sin\omega+\sin\psi\sin\theta.\cos\omega, \\ b = t\sin\omega+\cos\psi\sin\theta.\cos\omega, \\ c = \cos\varphi\sin\theta\sin\omega-\cos\theta\cos\omega. \end{cases}$$

Es sei ferner:

$$6.\quad \begin{cases} a' = f\cos\omega-\sin\psi\sin\theta\sin\omega, & a''=g, & aa'+bb'+cc'=0, \\ b' = t\cos\omega-\cos\psi\sin\theta\sin\omega, & b''=k, & aa''+bb''+cc''=0, \\ c' = \cos\varphi\sin\theta\cos\omega+\cos\theta\sin\omega, & c''=\sin\varphi\sin\theta, & a'a''+b'b''+c'c''=0. \end{cases}$$

Werden aus den Winkeln φ', ψ', θ' die Gröſsen g', k', f', t' entsprechend den bisherigen g, f, k, t gebildet, so kann man setzen:

$$7.\quad a''=g',\quad b''=k',\quad c''=\sin\varphi'\sin\theta';\quad a'=f',\quad b'=t',\quad c'=\cos\varphi'\sin\theta';$$

$$8.\quad a=\sin\psi'\sin\theta',\quad b=\cos\psi'\sin\theta',\quad c=-\cos\theta'.$$

Aus den Gleichungen (8.) werden die Winkel ψ', θ' bestimmt, so daſs nur noch φ' veränderlich bleibt. Man erhält aus (4.):

$$9.\quad ax+by+cz = -qg'\sin\omega-rk'\cos\omega,$$

$$10.\quad f'.x+t'.y+\cos\varphi'\sin\theta'.z = rk'\sin\omega-qg'\cos\omega.$$

Der Gleichung (10.) wird aber, unabhängig von φ', durch die beiden folgenden Genüge geleistet:

$$11.\quad \begin{cases} \sin\psi'\cos\theta'.x+\cos\psi'\cos\theta'.y+\sin\theta'.z = -r\sin\psi'\sin\omega-q\cos\psi\cos\omega, \\ -\cos\psi'.x+\sin\psi'.y = r\cos\psi'\cos\theta'\sin\omega-q\sin\psi'\cos\theta'\cos\omega, \end{cases}$$

welche sich in folgende umwandeln lassen:

$$12.\quad \begin{cases} a(y-qc\cos\omega) = b(x-rc\sin\omega), \\ b(z+qb\cos\omega+ra\sin\omega) = c(y-qc\cos\omega). \end{cases}$$

Diese Gleichungen stellen eine mit der festen Axe parallele Linie dar,

welche von allen Resultanten getroffen wird, die das System in seinen sämmtlichen, mit den Bedingungen (3.) verträglichen Stellungen hat. Hieraus folgt der Satz:

Werden die Kräfte des Systemes um eine beliebige auf der Resultante senkrechte Axe (ohne anderweitige Verrückung) gedacht; so schneiden alle zugehörigen Resultanten eine gewisse feste, der Drehungs-Axe parallele Gerade.

Der Punct, in welchem diese Gerade die Ebene trifft, deren Gleichung:

$$13. \qquad ax + by + cz = 0,$$

hat die Coordinaten:

$$x = rc\sin\omega, \qquad y = qc\cos\omega, \qquad z = -qb\cos\omega - ra\sin\omega.$$

Daher bilden alle diese, von den Resultanten getroffenen Geraden, welche den verschiedenen Werthen von ω, d. h. den verschiedenen Stellungen des Systemes gegen die feste Axe, bei unveränderlicher Richtung der Resultante, entsprechen, einen auf der Ebene (13.) senkrechten Cylinder, dessen elliptische Grundfläche, in dieser Ebene, durch folgende Gleichungen bestimmt ist:

$$14. \qquad ax + by + cz = 0, \qquad \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{q^2} = c^2.$$

Wenn man sich das vorgelegte System von Kräften in einer bestimmten Stellung denkt, den Anfang der Coordinaten beliebig, und die Axe der x parallel mit der Mittelkraft wählt, hierauf die Kräfte nach den drei Axen zerlegt, so erhält man aus den allgemeinen Formeln, indem man $\psi = 0$, $\theta = 0$ setzt, folgende Gleichungen für die mit dem kleinsten Kräfte-Axen verbundene Resultante:

$$15. \qquad \begin{cases} z - p''' = r'\cos\varphi + r''\sin\varphi, \\ \cos\varphi(y - p'' + q') = \sin\varphi(x - p' - q''). \end{cases}$$

Diese Gleichungen beziehen sich auf alle diejenigen Resultanten, welche entstehen, wenn das System, in der vorausgesetzten Stellung gedacht, um die Axe der z gedreht wird. Diese Resultanten treffen also sämmtlich die gerade Linie, deren Gleichungen sind:

$$16. \qquad x = p' + q'', \qquad y = p'' - q'.$$

Um den so bestimmten Punct in der Ebene xy zu finden, projicire man die sämmtlichen Kräfte nebst ihren Angriffspuncten auf die Ebene xy, zerlege die Kräfte nach zwei Richtungen, bringe die beiden Summen A und B paralleler Kräfte an ihren Schwerpuncten A und B an, lege durch

den Durchschnitt D der beiden Richtungen von A und B die Resultante, und durch die Puncte A, B, D einen Kreis, welcher von der Resultante in C zum zweitenmale geschnitten wird; so ist C der gesuchte Mittelpunct der in der Ebene xy gedachten Kräfte.

Projicirt man gleichfalls die Kräfte des Systemes auf die Ebene xz, so erhält man einen zweiten Mittelpunct, dessen Coordinaten sind:

$$17. \quad x = p' + r''', \qquad z = p''' - r'.$$

Nun habe man ein Seilpolygon, an beiden Enden befestigt, auf welches Kräfte von gegebenen Richtungen und Intensitäten wirken; es sei der eine Endpunct Anfang der Coordinaten, die Axe der x parallel der Mittelkraft, und die Kräfte nach den Axen zerlegt, so ist:

$$p = \Sigma P\cos\alpha = 1, \qquad q = \Sigma P\cos\beta = 0, \qquad r = \Sigma P\cos\gamma = 0,$$
$$p' = \Sigma Px\cos\alpha, \qquad q'' = \Sigma Py\cos\beta, \qquad r''' = \Sigma Pz\cos\gamma.$$

Nach dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten muſs, für das Gleichgewicht des Polygons, die Summe

$$\Sigma P(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) = p' + q'' + r'''$$

ein Maximum sein.

Wenn die Kräfte des Seilpolygons alle einer Ebene parallel gegeben sind, so nehme man diese zur Ebene xy, alsdann ist $\cos\gamma = 0$, $\cos\gamma' = 0$, u. s. f., mithin $r''' = 0$. Die Bedingung des Gleichgewichts bei einem solchen Polygone, ist also nur die, daſs der Abstand $p' + q''$ möglichst groſs, oder der Mittelpunct der (auf die Ebene xy projicirten) Kräfte in der Richtung der Resultante möglichst weit vorgeschoben sei. Dieser Satz war, meines Wissens, bisher nur für den Schwerpunct paralleler Kräfte bekannt.

Im allgemeinen Falle läſst sich der Abstand $p' + q'' + r'''$ auf verschiedene Arten construiren, von welchen ich nur die folgende angeben will. Man projicire das Seilpolygon, in irgend einer Stellung gedacht, auf die Ebene xy und xz, so giebt jede der Projectionen einen Mittelpunct der Kräfte.

An jedem dieser beiden Mittelpuncte denke man sich die Mittelkraft in ihrem Sinne angebracht, zugleich aber an dem Centralpuncte des Systems dieselbe Kraft im entgegengesetzten Sinne, so wird der Abstand des Schwerpunctes dieser drei parallelen Kräfte von der auf der Mittelkraft senkrechten Ebene (yz) gleich $p' + q'' + p' + r''' - p' = p' + q'' + r'''$ ein Maximum sein, wenn das Gleichgewicht in dem Seilpolygone besteht.

21.

Summenrechnung für Reihen, die durch zusammengesetzte Functionen erzeugt werden.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Band XII., No. 22., 23. und 24. Band XIII. No. 18. und 23. Band. XIV. und No. 17. Band. XV.)

§. 116.

Bei weitem leichter und bequemer lassen sich Reihen summiren, deren Glieder aus Facultäten und Exponential-Gröfsen zusammengesetzt sind. Legen wir zuerst eine solche Reihe zum Grunde, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, und wollen wir den zugehörigen Summen-Ausdruck finden, so haben wir in (473.) $X = x^{p|\Delta x}$ und $Y = a^x$ zu setzen. Dann gewinnen wir:

$$x^{p|\Delta x}.a^x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x}a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x} + \dots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$= (x+(n+1)\Delta x)^p\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} - \Delta(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}\Delta^{-2}a^{x+(n+2)\Delta x} + \dots$$
$$\dots - [x^{p|\Delta x}\Delta^{-1}a^x - \Delta x^{p|\Delta x}\Delta^{-2}a^{x+\Delta x} + \Delta^2 x^{p|\Delta x}\Delta^{-3}a^{x+2\Delta x} - \dots].$$

Um den Summen-Ausdruck selbst darstellen zu können, sind uns die positiven Unterschiede der Facultäten und die negativen der Exponential gröfsen nöthig. Letztere sind, wie sie hier nöthig werden, schon §. 111. mitgetheilt worden. Die erstern, die noch nöthig sind, ergeben sich aus (147.), wenn dort statt y die erforderlichen Functionen eingeführt werden. Wir erhalten:

$$510. \quad \begin{cases} \Delta(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} = p.\Delta x(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}, \\ \Delta^2(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(\Delta x)^2(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x}, \\ \Delta^3(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3(x+(n+4)\Delta x)^{p-3|\Delta x}, \\ \Delta^4(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} = p\dots(p-3)(\Delta x)^4(x+(n+5)\Delta x)^{p-4|\Delta x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{und} \\ \Delta x^{p|\Delta x} = p.\Delta x(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}, \\ \Delta^2 x^{p|\Delta x} = p(p-1)(\Delta x)^2(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}, \\ \Delta^3 x^{p|\Delta x} = p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3(x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}, \\ \Delta^4 x^{p|\Delta x} = p\dots(p-3)(\Delta x)^4(x+4\Delta x)^{p-4|\Delta x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Führen wir nun die in der vorstehenden Summengleichung angezeigten Werthe ein, so erhalten wir:

511. $$x^{p|\Delta x}.a^x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x} - x^{p|\Delta x}.a^x}{a^{\Delta x}-1}$$
$$- p\Delta x \frac{(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x} - (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}$$
$$+ p(p-1)(\Delta x)^2 \frac{(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{x+(n+3)\Delta x} - (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}$$
$$- p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3 \frac{(x+(n+3)\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{x+(n+4)\Delta x} - (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{x+3\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^4}.$$

. . . .

Berücksichtigt man auch hier, dafs das letzte Glied der Summenreihe nicht mit dem ersten Gliede im Summen-Ausdrucke übereinstimmt, so kann man, um die Übereinstimmung beider herbeizuführen, auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}$ zuzählen. Verbindet man nun dieses Glied mit dem ersten der Summenreihe, so gewinnt man:

$$\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} + (x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}$$
$$= \frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1}.$$

Führt man nun diesen Werth ein, und setzt nach der Einführung in der ganzen Reihe n statt $n+1$, so zieht man hieraus Folgendes:

512. $$x^{p|\Delta x}.a^x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x} + \ldots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1}[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x} - x^{p|\Delta x}]$$
$$- \frac{p.\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{n\Delta x} - (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}]$$
$$+ \frac{p(p-1)(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{n\Delta x} - (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}]$$
$$- \frac{p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3.a^{x+3\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^4}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{n\Delta x} - (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}].$$

. . . .

Das allgemeine Gesetz, welches dieser Reihe zum Grunde liegt, läfst sich seiner Einfachheit wegen leicht erkennen.

§. 117.

Um die Darstellung des Summen-Ausdruckes für zusammengesetzte Reihen gleicher Art, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, zu gewinnen, gehen wir von der Gleichung (477.) aus, und setzen, $X_0 = x^{p|\Delta x}$ und $Y_0 = a^x$. Dann wird:

$$x^{p|\Delta x}.a^x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x} - \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm[(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} - \Delta(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-2}a^{x+(n+2)\Delta x} + \ldots$$
$$x^{p|\Delta x}\zeta^{-1}a^x - \Delta x^{p|\Delta x}\zeta^{-2}a^{x+\Delta x} + \Delta^2 x^{p|\Delta x}\zeta^{-3}a^{x+2\Delta x} - \ldots].$$

Zur Darstellung des vorstehenden Summen-Ausdruckes sind uns die positiven Unterschiede der Facultäten, wie sie im vorhergehenden §. (512.) und die negativen Aufstufungen der Exponential-Gröfsen, wie sie §. 112. gegeben wurden, nöthig. Führen wir diese ein, so entsteht:

$$513.\quad x^{p|\Delta x}.a^x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x} - \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x} \pm x^{p|\Delta x}.a^x}{a^{\Delta x}+1}$$
$$\mp p\Delta x\frac{(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x} \pm (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}$$
$$\pm p(p-1)(\Delta x)^2\frac{(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{x+(n+3)\Delta x} \pm (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}$$
$$\mp p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3\frac{(x+(n+4)\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{x+(n+4)\Delta x} \pm (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4},$$

u. s. w.

Das letzte Glied in der Reihe stimmt der Form nach mit den ersten Gliedern des Summen-Ausdruckes nicht überein. Um auch hier, wie in den früheren Fällen, Übereinstimmung herbei zu führen, ist auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens $(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}$ bei einer ungeraden Glieder-Anzahl ab, bei einer geraden aber zuzuzählen. Geschieht dies, so wird das Abzählen zu dem ersten Gliede, das in diesem Falle positiv ist, zu Folgendem:

$$\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}} - (x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}$$
$$= -\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}},$$

das Zuzählen aber zu dem ersten, das negativ ist, zu

$$-\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}+(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+1)\Delta x}$$
$$=\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+(n+2)\Delta x}}{1+a^{\Delta x}}$$

führen. Trennt man nun die Reihen von ungerader und gerader Glieder-Anzahl von einander, und setzt dann n statt $n+1$, der einfachen Darstellung wegen, so führt eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl zu folgendem Summen-Ausdrucke:

514. $$x^{p|\Delta x}.a^x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x}+\ldots+(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$=+\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}+x^{p|\Delta x}]$$
$$+\frac{p.\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{n\Delta x}-(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}]$$
$$-\frac{p(p-1)(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}[(x+(n+2)\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{n\Delta x}-(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}]$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3.a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}[(x+(n+3)\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{n\Delta x}-(x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}]$$

. . . .

u. s. w.

Für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl gewinnt man:

515. $$x^{p|\Delta x}.a^x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x}+\ldots-(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$=-\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}-x^{p|\Delta x}]$$
$$-\frac{p.\Delta x.a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{n\Delta x}+(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}]$$
$$+\frac{p(p-1)(\Delta x)^2.a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3}[(x+(n+2)\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{n\Delta x}+(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}]$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3.a^{x+3\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^4}[(x+(n+3)\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{n\Delta x}+(x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}]$$

. . . .

§. 118.

Es lassen sich für die zusammengesetzte Reihen der vorliegenden Art, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, noch andere Summen-Ausdrücke finden, wenn man von der Gleichung (479.) ausgeht. Setzt man nämlich $X_0=x^{p|\Delta x}$ und $Y=a^x$, so gewinnt man:

516. $$x^{p|\Delta x}.a^x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x}-\ldots\pm(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$=\pm[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x}+\Delta(x+(n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x}+\ldots]$$
$$+(x-\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-1}a^x+\Delta(x-2\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-2}a^x+\ldots$$

Die positiven Unterschiede der Facultäten, die uns zur Darstellung der Summen-Ausdrücke nöthig werden, sind nach §. 30. No. 147. folgende:

517.
$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta\,(x+(n-1)\Delta x)^{p|\Delta x} = p.\Delta x(x+n\Delta x)^{p-1|\Delta x},\\
\Delta^2(x+(n-2)\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(\Delta x)^2(x+n\Delta x)^{p-2|\Delta x},\\
\Delta^3(x+(n-3)\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3(x+n\Delta x)^{p-3|\Delta x},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{u. s. w.,}\\
\Delta\,(x-2\Delta x)^{p|\Delta x} = p.\Delta x(x-\Delta x)^{p-1|\Delta x},\\
\Delta^2(x-3\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(\Delta x)^2(x-\Delta x)^{p-2|\Delta x},\\
\Delta^3(x-4\Delta x)^{p|\Delta x} = p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3(x-\Delta x)^{p-3|\Delta x},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

Die negativen Aufstufungen der Exponentialgröfsen, die uns ferner nöthig werden, sind schon oben §. 113. mitgetheilt. Die Einführung dieser Werthe in die Gleichung (516.) führt zu folgendem Resultate bei einer Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

518.
$$x^{p|\Delta x}.a^x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x}+(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+2\Delta x}-\ldots+(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$=\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+\Delta n x)^{p|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}+(x-\Delta x)^{p|\Delta x}]$$
$$+\frac{p.a^x.\Delta x}{(1+a^{\Delta x})^2}[(x+n\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}+(x-\Delta x)^{p-1|\Delta x}]$$
$$+\frac{p(p-1)a^x.(\Delta x)^2}{(1+a^{\Delta x})^3}[(x+n\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}+(x-\Delta x)^{p-2|\Delta x}]$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)a^x.(\Delta x)^3}{(1+a^{\Delta x})^4}[(x+n\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}+(x-\Delta x)^{p-3|\Delta x}].$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl aber entsteht folgende Gleichung:

519.
$$x^{p|\Delta x}.a^x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+\Delta x}+\ldots-(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{x+n\Delta x}$$
$$=-\frac{a^x}{1+a^{\Delta x}}[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}-(x-\Delta x)^{p|\Delta x}]$$
$$-\frac{p.a^x.\Delta x}{(1+a^{\Delta x})^2}[(x+n\Delta x)^{p-1|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}-(x-\Delta x)^{p-1|\Delta x}]$$
$$-\frac{p(p-1).a^x.(\Delta x)^2}{(1+a^{\Delta x})^3}[(x+n\Delta x)^{p-2|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}-(x-\Delta x)^{p-2|\Delta x}]$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2).a^x.(\Delta x)^3}{(1+a^{\Delta x})^4}[(x+n\Delta x)^{p-3|\Delta x}.a^{(n+1)\Delta x}-(x-\Delta x)^{p-3|\Delta x}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

u. s. w.

§. 119.

Will man nun von den, in §§. 116 — 118. gefundenen Formeln Anwendungen machen, so hat man x und Δx so anzunehmen, dafs sie die kürzesten Ausdrücke erzeugen. Setzt man nun in (512.). $x = 0$, $\Delta x = 1$, und statt p allmählig die Werthe 1, 2, 3, ..., so zieht man hieraus folgende Darstellungen;

$$520. \quad \begin{cases} 1.a + 2.a^2 + 3.a^3 + \ldots + n.a^n = \dfrac{n.a^{n+1}}{a-1} - \dfrac{a}{(a-1)^2}(a^n - 1), \\ 1.2.a + 2.3.a^2 + 3.4.a^3 + \ldots + n(n+1)a^n \\ \quad = \dfrac{n(n+1)a^{n+1}}{a-1} - \dfrac{2.a}{(a-1)^2}[(n+1)a^n - 1] + \dfrac{2.1.a^2}{(a-1)^3}(a^n - 1), \\ 1.2.3.a + 2.3.4.a^2 + 3.4.5.a^3 + \ldots + n(n+1)(n+2)a^n \\ \quad = \dfrac{n(n+1)(n+2)a^{n+1}}{a-1} - \dfrac{3.a}{(a-1)^2}[(n+1)(n+2)a^n - 1.2] \\ \quad + \dfrac{3.2.a^2}{(a-1)^3}[(n+2)a^n - 2] + \dfrac{3.2.1.a^3}{(a-1)^4}(a^n - 1), \\ 1.2.3.4.a + 2.3.4.5.a^2 + \ldots + n(n+1)(n+2)(n+3)a^n \\ \quad = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)a^{n+1}}{a-1} - \dfrac{4.a}{(a-1)^2}[(n+1)(n+2)(n+3)a^n - 1.2.3] \\ \quad + \dfrac{4.3.a^2}{(a-1)^3}[(n+2)(n+3)a^n - 2.3] - \dfrac{4.3.2.a^3}{(a-1)^4}[(n+3)a^n - 3] \\ \quad + \dfrac{4.3.2.1.a^4}{(a-1)^5}(a^n - 1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Gleichungen (514.) und (515.) des §. 117. führen zu folgenden Resultaten, wenn man $x = 0$, $\Delta x = 1$ setzt, und berücksichtigt, dafs dann das erste Glied verschwinden wird und die Zeichen wechseln müssen, wenn das erste mit dem positiven Zeichen anfangen soll, und zwar für Reihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl:

$$521. \quad \begin{cases} 1.a - 2.a^2 + 3.a^3 - \ldots + n.a^n = \dfrac{n.a^{n+1}}{1+a} + \dfrac{a}{1+a}(a^n + 1), \\ 1.2.a - 2.3.a^2 + 3.4.a^3 - \ldots + n(n+1)a^n \\ \quad = \dfrac{n(n+1)a^{n+1}}{1+a} + \dfrac{2.a}{(1+a)^2}[(n+1)a^n + 1] - \dfrac{2.1.a^2}{1+a^3}(a^n + 1), \\ 1.2.3.a - 2.3.4.a^2 + \ldots + n(n+1)(n+2)a^n \\ \quad = \dfrac{n(n+1)(n+2)a^{n+1}}{1+a} + \dfrac{3.a}{(1+a)^2}[(n+1)(n+2)a^n + 1.2] \\ \quad - \dfrac{3.2.a^2}{(1+a)^3}[(n+2)a^n + 2] + \dfrac{3.2.1}{(1+a)^4}(a^n + 1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Für Reihen von gerader Glieder-Anzahl erhält man:

$$522.\quad \begin{cases} 1.a-2.a^2+3.a^3-\ldots.-n.a^n = -\frac{n.a^{n+1}}{1+a}-\frac{a}{(1+a)^2}(a^n-1), \\ 1.2.a-2.3.a^2+3.4.a^3-\ldots.-n(n+1)a^n \\ \quad = -\frac{n(n+1)a^{n+1}}{1+a}-\frac{2.a}{(1+a)^2}[(n+1)a^n-1]+\frac{2.1.a^2}{(1+a)^3}(a^n-1), \\ 1.2.3.a-2.3.4.a^2+3.4.5.a^3-\ldots.-n(n+1)(n+2)a^n \\ \quad = -\frac{n(n+1)(n+2)a^{n+1}}{1+a}-\frac{3.a}{(1+a)^2}[(n+1)(n+2)a^n-1.2] \\ \qquad +\frac{3.2.a^2}{(1+a)^3}[(n+1)a^n-2]-\frac{3.2.1.a^3}{(1+a)^4}(a^n-1), \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die einfachsten Darstellungen der Summen-Ausdrücke für zusammengesetzte Reihen der vorliegenden Art erhalten wir, wenn wir in den Gleichungen (518.) und (519.) $x=1$, $\Delta x=1$ und $n-1$ statt n setzen; denn alsdann verschwinden alle Glieder der zweiten Scheitelreihe, mit Ausnahme des Falles, wenn in dem Ausdrucke

$$0^{p-m\,|\,\Delta x}$$

$m=p$ wird. Hiernach geht nämlich der vorliegende Ausdruck in die Form $0^{0|\Delta x}$ über, und es ist

$$0^{0\,|\,\Delta x}=1.$$

Für Reihen von ungerader Glieder-Anzahl erhalten wir dann folgende Darstellungen:

$$523.\quad \begin{cases} 1.a-2.a^2+3.a^3-\ldots.+n.a^n = a^{n+1}\left(\frac{n}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}\right)+\frac{a}{(1+a)^2}, \\ 1.2.a-2.3.a^2+3.4.a^3-\ldots.+n(n+1)a^n \\ \quad = a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{1+a}+\frac{2.n}{(1+a)^2}+\frac{1.2}{(1+a)^3}\right)+\frac{2.1.a}{(1+a)^3}, \\ 1.2.3.a-2.3.4.a^2+3.4.5.a^3-\ldots.+n(n+1)(n+2)a^n \\ \quad = a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1+a}+\frac{3.n(n+1)}{(1+a)^2}+\frac{3.2.n}{(1+a)^3}+\frac{3.2.1}{(1+a)^4}\right)+\frac{3.2.1.a}{(1+a)^4}, \\ 1.2.3.4.a-2.3.4.5.a^2+\ldots.+n(n+1)(n+2)(n+3)a^n \\ \quad = a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1+a}+\frac{4.n(n+1)(n+2)}{(1+a)^2}+\frac{4.3.n(n+1)}{(1+a)^3}+\frac{4.3.2.n}{(1+a)^4}+\frac{4.3.2.1}{(1+a)^5}\right) \\ \qquad +\frac{4.3.2.1.a}{(1+a)^5}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Für Reihen von gerader Glieder-Anzahl gewinnen wir folgende Darstellungen:

$$
524. \begin{cases}
1.a-2.a^2+3.a^3-\ldots-n.a^n = -a^{n+1}\left(\frac{n}{1+a}+\frac{1}{(1+a)^2}\right)-\frac{a}{(1+a)^2}, \\
1.2.a-2.3.a^2+3.4.a^3-\ldots-n(n+1)a^n \\
\quad = -a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{1+a}+\frac{2n}{(1+a)^2}+\frac{1.2}{(1+a)^3}\right)+\frac{1.2.a}{(1+a)^3}, \\
1.2.3.a-2.3.4.a^2+3.4.5.a^3-\ldots-n(n+1)(n+2)a^n \\
\quad = -a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1+a}+\frac{3.n(n+1)}{(1+a)^2}+\frac{3.2.n}{(1+a)^3}+\frac{3.2.1}{(1+a)^4}\right)+\frac{3.2.1.a.}{(1+a)^4}, \\
1.2.3.4.a-2.3.4.5.a^2+3.4.5.6.a^3-\ldots-n(n+1)(n+2)(n+3)a^n \\
\quad = -a^{n+1}\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1+a}+\frac{4.n(n+1)(n+2)}{(1+a)^2}+\frac{4.3.n(n+1)}{(1+a)^3}+\frac{4.3.2.1}{(1+a)^4}+\frac{4.3.2.1}{(1+a)^4}\right) \\
\qquad +\frac{4.3.2.1.a}{(1+a)^4} \\
\text{u. s. w.}
\end{cases}
$$

§. 120.

Wir wenden uns nun zur Summirung solcher Reihen, deren Grundglieder die Kreisfunctionen sind, welche mit den Potenzen oder Facultäten als Vorzahlen verbunden erscheinen. Wie früher, so auch betrachten wir hier zuerst solche Reihen, deren Glieder mit einerlei Zeichen, dann solche, deren Glieder mit abwechselnden Gliedern versehen sind. Zuerst untersuchen wir die Summe der Sinusreihen.

Gehen wir von der Gleichung (473.) aus, so erhalten wir, wenn $X=x^p$ und $Y=\sin x$ gesetzt wird, Nachstehendes:

$$
\begin{aligned}
& x^p\sin x+(x+\Delta x)^p\sin(x+\Delta x)+(x+2\Delta x)^p\sin(x+2\Delta x)\ldots \\
& \qquad \ldots+(x+n\Delta x)^p\sin(x+n\Delta x) \\
= & (x+(n+1)\Delta x)^p\Delta^{-1}\sin(x+(n+1)\Delta x)-\Delta(x+(n+1)\Delta x)^p\Delta^{-2}\sin(x+(n+2)\Delta x)+\ldots \\
& -x^p\Delta^{-1}\sin x+\Delta x^p\Delta^{-2}\sin(x+\Delta x)-\Delta^2x^p\Delta^{-3}\sin(x+2\Delta x)\ldots
\end{aligned}
$$

Zur Darstellung des vorliegenden Summen-Ausdruckes werden uns die positiven Unterschiede der Potenzialgröfsen und die negativen der Sinusfunctionen nöthig. Die erstern deuten wir nur an, und berufen uns ihrer entwickelten Darstellung wegen auf §. 114. Die negativen Unterschiede der Functionen des Sinus sind nach No. 206. folgende:

$$
525. \begin{cases}
\Delta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] = -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}, \\
\Delta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x] = -\frac{\sin[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\
\Delta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] = +\frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}, \\
\Delta^{-4}\sin[x+(n+4)\Delta x] = +\frac{\sin[x+(n+2)\Delta x]}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{cases}
$$

$$525.\quad \begin{cases} \Delta^{-1}\sin x = -\dfrac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \Delta^{-2}\sin(x+\Delta x) = -\dfrac{\sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \Delta^{-3}\sin(x+2\Delta x) = +\dfrac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}, \\ \Delta^{-4}\sin(x+3\Delta x) = +\dfrac{\sin(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Die richtige Substitution dieser Werthe in die vorstehende Gleichung führt zu folgender Darstellung:

$$526.\quad x^p\sin x+(x+\Delta x)^p\sin(x+\Delta x)+\dots+(x+n\Delta x)^p\sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]-x^p.\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$+\frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^p.\sin[x+(n+1)\Delta x]\,\Delta x^p.\sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$+\frac{\Delta^2[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x)-\Delta^2x^p.\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$-\frac{\Delta^3[x+(n+1)\Delta x]^p.\sin[x+(n+2)\Delta x]-\Delta^3x^p.\sin(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Legen wir die Gleichung (477.) zum Grunde und setzen dort $X_0=x^p$, $Y=\sin x$, so erhalten wir folgende allgemeine formelle Darstellung:

$$x^p\sin x-(x+\Delta x)^p\sin(x+\Delta x)+(x+2\Delta x)^p\sin(x+2\Delta x)\dots$$
$$\dots\pm(x+n\Delta x)^p\sin(x+n\Delta x)$$
$$=\pm[(x+(n+1)\Delta x)^p\zeta^{-1}\sin(x+(n+1)\Delta x)-\Delta(x+(n+1)\Delta x)^p\zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x)+\dots]$$
$$+x^p\zeta^{-1}\sin x-\Delta(x+\Delta x)^p\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x)+\Delta^2(x+2\Delta x)^p\zeta^{-3}\sin(x+2\Delta x)-\dots$$

Die negativen Aufstufungen, die uns neben den positiven Unterschieden nöthig werden, um den verlangten Summen-Ausdruck darstellen zu können, sind nach No. 90.:

$$527.\quad \begin{cases} \zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \dfrac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \zeta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x] = \dfrac{\sin[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \zeta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] = \dfrac{\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}. \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$527. \quad \begin{cases} \zeta^{-1}\sin x = \dfrac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) = \dfrac{\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \zeta^{-3}\sin(x+2\Delta x) = \dfrac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Einführung der angezeigten Werthe in die oben angegebene Gleichung, giebt folgende Reihe mit ihrem Summen-Ausdrucke:

$$528. \quad x^p\sin x-(x+\Delta x)^p\sin(x+\Delta x)+(x+2\Delta x)^p\sin(x+2\Delta x)-\ldots\pm(x+n\Delta x)^p\sin(x+n\Delta x)$$
$$=\pm\frac{[x+(n+1)\Delta x]^p\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]\pm x^p\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$\mp\frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^p\sin[x+(n+1)\Delta x]\pm\Delta x^p\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\pm\frac{\Delta^2[x+(n+1)\Delta x]^p\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]\pm\Delta^2x^p\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\mp\frac{\Delta^3[x+(n+1)\Delta x]^p\sin[x+(n+2)\Delta x]\pm\Delta^3x^p\sin(x+\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Legen wir endlich die Gleichung (479.) zum Grunde, und setzen auch hier $X_0=x^p$ und $Y=\sin x$, so entsteht:

$$x^p\sin x-(x+\Delta x)^p\sin(x+\Delta x)+\ldots\pm(x+n\Delta x)^p\sin(x+n\Delta x)=$$
$$\pm[(x+n\Delta x)^p\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x]+\Delta[x+(n-1)\Delta x]^p\zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x]+\ldots]$$
$$+(x-\Delta x)^p\zeta^{-1}\sin x+\Delta(x-2\Delta x)^p\zeta^{-2}\sin x+\Delta^2(x-3\Delta x)^p\zeta^{-3}\sin x+\ldots$$

Die negativen Aufstufungen, die uns zur entwickelten Darstellung des vorliegenden Summen-Ausdruckes führen, sind nach No. 90. folgende:

$$529. \quad \begin{cases} \zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \dfrac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \dfrac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \zeta^{-3}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \dfrac{\sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta^{-1}\sin x = \dfrac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \zeta^{-2}\sin x = \dfrac{\sin(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \zeta^{-3}\sin x = \dfrac{\sin(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die Einführung dieser Werthe am angezeigten Orte führt zu folgender Darstellung des Summen-Ausdruckes für eine zusammengesetzte Sinus-reihe mit ihrem Summen-Ausdrucke:

530. $$x^p \sin x - (x+\Delta x)^p \sin(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^p \sin(x+n\Delta x)$$

$$= \pm \frac{(x+n\Delta x)^p \sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] \pm (x-\Delta x)^p \sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\pm \frac{\Delta[x+(n-1)\Delta x]^p \sin(x+n\Delta x) \pm \Delta(x-2\Delta x)^p \sin(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$

$$\pm \frac{\Delta^2[x+(n-2)\Delta x]^p \sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x] \pm \Delta^2(x-3\Delta x)^p \sin(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

$$\pm \frac{\Delta^3[x+(n-3)\Delta x]^p \sin[x+(n-1)\Delta x] \pm \Delta^3(x-4\Delta x)^p \sin(x-2\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$

. . . .

Andere Darstellungen für die in dem vorstehenden §. mitgetheilten Summengleichungen, sollen unten §. 142. No. 616 — 618. gegeben werden.

§. 121.

Sehr leicht gewinnen wir Reihen, deren Glieder aus den Functionen des Sinus und den Facultäten zusammengesetzt sind, wenn wir die Gleichungen (473.), (477.) und (479.) zu Grunde legen. Die Gleichung (473.) führt uns, wenn $X_0 = x^{p|\Delta x}$ und $Y = \sin x$ gesetzt wird, zu folgender formellen Gleichung:

$$x^{p|\Delta x} \sin x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x} \sin(x+\Delta x) + \ldots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} \sin(x+n\Delta x)$$

$$= [x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x} \Delta^{-1} \sin[x+(n+1)\Delta x] - \Delta[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x} \Delta^{-2} \sin[x+(n+2)\Delta x] + \ldots$$

$$- x^{p|\Delta x} \Delta^{-1} \sin x + \Delta x^{p|\Delta x} \Delta^{-2} \sin(x+\Delta x) - \Delta^2 x^{p|\Delta x} \Delta^{-3} \sin(x+2\Delta x) + \ldots$$

Die positiven Unterschiede der Facultäten, deren Darstellung der vorliegende Summen-Ausdruck erheischt, sind schon oben No. 510. §. 116., und die negativen Unterschiede des Sinus No. 525. §. 120. mitgetheilt. Ihre Einführung erzeugt folgende Reihe mit ihrem Summen-Ausdrucke:

531. $$x^{p|\Delta x} \sin x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x} \sin(x+\Delta x) + \ldots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} \sin(x+n\Delta x)$$

$$= \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x} \cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] - x^{p|\Delta x} \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$- p\Delta x \frac{[x+(n+2)\Delta x]^{p-1|\Delta x} \sin[x+(n+1)\Delta x] - (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x} \sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$

$$+ p(p-1)(\Delta x)^2 \frac{[x+(n+3)\Delta x]^{p-2|\Delta x} \sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x} \sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

$$- p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3 \frac{[x+(n+4)\Delta x]^{p-3|\Delta x} \sin[x+(n+2)\Delta x] - (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x} \sin(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$

. . . .

Die Gleichung (477.) führt zu folgender formellen Darstellung für eine Reihe mit abwechselnden Zeichen, wenn $X = x^{p|\Delta x}$ und $Y = \sin x$ gesetzt wird:

$$x^{p|\Delta x}\sin x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+n\Delta x)$$
$$= \pm\left[[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x}\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] - \Delta[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x}\zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x] + \ldots\right]$$
$$+ x^{p|\Delta x}\zeta^{-1}\sin x - \Delta x^{p|\Delta x}\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) + \Delta^2 x^{p|\Delta x}\zeta^{-3}\sin(x+2\Delta x) + \ldots$$

Die negativen Aufstufungen, deren Darstellung der vorliegende Summen-Ausdruck erheischt, sind schon im vorhergehenden §. No. 527. angegeben werden. Benutzen wir sie, so entsteht:

532. $$x^{p|\Delta x}\sin x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+n\Delta x)$$
$$= \pm\frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x}\sin[x+(n+\tfrac{1}{2})\Delta x] - x^{p|\Delta x}\sin(x-\tfrac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\tfrac{1}{2}\Delta x}$$
$$\mp p\Delta x\frac{[x+(n+2)\Delta x]^{p-1|\Delta x}\sin[x+(n+1)\Delta x] - (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}\sin x}{2^2(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\pm p(p-1)(\Delta x)^2\frac{[x+(n+3)\Delta x]^{p-2|\Delta x}\sin[x+(n+\tfrac{3}{2})\Delta x] - (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}\sin(x+\tfrac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\mp p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3\frac{[x+(n+4)\Delta x]^{p-3|\Delta x}\sin[x+(n+2)\Delta x] - (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}\sin(n+\Delta x)}{2^4(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^4}$$

. . . .

Die Gleichung (479.) führt zu folgendem Resultate, wenn $X = x^{p|\Delta x}$ und $Y = \sin x$ gesetzt wird:

$$x^{p|\Delta x}\sin x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+n\Delta x)$$
$$= \pm[(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] \pm \Delta\sin[x+(n-1)\Delta x]^{p|\Delta x}\zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x] - \ldots]$$
$$+ (x-\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-1}\sin x + \Delta(x-2\Delta x)^{p|\Delta x}\zeta^{-2}\sin x + \ldots$$

Die negativen Aufstufungen, die in die vorstehende Gleichung einzuführen sind, wurden No. 529. §. 120. angegeben. Wir ziehen aus der vorstehenden Gleichung, bei gehöriger Substitution:

533. $$x^{p|\Delta x}\sin x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x+n\Delta x)$$
$$= \pm\frac{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}\sin[x+(n+\tfrac{1}{2})\Delta x] \pm (x-\Delta x)^{p|\Delta x}\sin(x-\tfrac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\tfrac{1}{2}\Delta x}$$
$$\pm p\Delta x\frac{(x+n\Delta x)^{p-1|\Delta x}\sin(x+n\Delta x) \pm (x-\Delta x)^{p-1|\Delta x}\sin(x-\Delta x)}{2^2(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\pm p(p-1)(\Delta x)^2\frac{(x+n\Delta x)^{p-2|\Delta x}\sin[x+(n-\tfrac{1}{2})\Delta x] \pm (x-\Delta x)^{p-2|\Delta x}\sin(x-\tfrac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\pm p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3\frac{(x+n\Delta x)^{p-3|\Delta x}\sin[x+(n-1)\Delta x] \pm (x-\Delta x)^{p-3|\Delta x}\sin(x-2\Delta x)}{2^4(\cos\tfrac{1}{2}\Delta x)^4}$$

. . . .

In den sämmtlichen Gleichungen dieses und des vorhergehenden §. gilt das positive Zeichen für eine ungerade, das negative aber für eine gerade Glieder-Anzahl:

§. 122.

Befolgen wir nun die nämliche Entwickelungsmethode, die wir in den beiden vorhergehenden §§. angewendet haben, für Reihen, deren Glieder aus den Functionen des Cosinus, und aus Potenzial-Gröſsen oder Facultäten zusammengesetzt sind, so erhalten wir ähnliche Summen-Ausdrücke. Wir theilen den ausführlichen Entwickelungsgang nicht mit, sondern setzen nur die Resultate her. Diese sind folgende:

534. $$x^p.\cos x + (x+\Delta x)^p.\cos(x+\Delta x) + \ldots + (x+n\Delta x)^p.\cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{[x+(n+1)\Delta x]^p.\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] - x^p.\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$+ \frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+1)\Delta x] - \Delta x^p.\cos x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$- \frac{\Delta^2[x+(n+1)\Delta x]^p.\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - \Delta^2 x^p.\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$- \frac{\Delta^3[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+2)\Delta x] - \Delta^3 x^p.\cos(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

für Cosinusreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind:

535. $$x^p.\cos x - (x+\Delta x)^p.\cos(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^p.\cos(x+n\Delta x)$$
$$= \pm \frac{[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] - x^p.\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$\mp \frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+1)\Delta x] - \Delta x^p.\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\pm \frac{\Delta^2[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - \Delta^2 x^p.\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\mp \frac{\Delta^3[x+(n+1)\Delta x]^p.\cos[x+(n+2)\Delta x] - \Delta^2 x^p.\cos(x+\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ferner erhalten wir für Reihen von derselben Art:

536. $$x^p \cos x - (x+\Delta x)^p \cos(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^p . \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \pm \frac{(x+n\Delta x)^p . \cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] \pm (x-\Delta x)^p . \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$\pm \frac{\Delta[x+(n-1)\Delta x]^p . \cos(x+n\Delta x) \pm \Delta(x-2\Delta x)^p . \cos(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\mp \frac{\Delta^2[x+(n-2)\Delta x]^p . \cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x] \pm \Delta^2(x-3\Delta x)^p . \cos(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\pm \frac{\Delta^3[x+(n-3)\Delta x]^p . \cos[x+(n-1)\Delta x] \pm \Delta^3(x-4\Delta x)^p . \cos(x-2\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
. . . .

Unten §. 142. wird auf eine andere Darstellung für die in diesem §. mitgetheilte Summengleichung verwiesen werden.

§. 123.

Verbinden wir aber die Function des Cosinus mit Facultäten, so erhalten wir für den Summen-Ausdruck einer Reihe, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, folgende Darstellung:

537. $$x^{p|\Delta x} . \cos x + (x+\Delta x)^{p|\Delta x} . \cos(x+\Delta x) + \ldots + (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} . \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x} . \sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] - x^{p|\Delta x} . \sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$+ p\Delta x \frac{[x+(n+2)\Delta x]^{p-1|\Delta x} . \cos[x+(n+1)\Delta x] - (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x} . \cos x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$- p(p-1)(\Delta x)^2 \frac{[x+(n+3)\Delta x]^{p-2|\Delta x} . \sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x} . \sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$- p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3 \frac{[x+(n+4)\Delta x]^{p-3|\Delta x} . \cos[x+(n+2)\Delta x] - (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x} . \cos(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
. . . .

Für eine Reihe, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, erhalten wir:

538. $$x^{p|\Delta x} \cos x - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} . \cos(x+\Delta x) + \ldots \pm (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} . \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \pm \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p|\Delta x} . \cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] \pm x^{p|\Delta} . \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$\mp p\Delta x \frac{[x+(n+2)\Delta x]^{p-1|\Delta x} . \cos[x+(n+1)\Delta x] \pm (x+\Delta x)^{p-1|\Delta x} . \cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$\pm p(p-1)(\Delta x)^2 \frac{[x+(n+3)\Delta x]^{p-2|\Delta x} . \cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] \pm (x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x} . \cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\mp p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3 \frac{[x+(n+4)\Delta x]^{p-3|\Delta x} . \cos[x+(n+2)\Delta x] \pm (x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x} . \cos(x+\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$
. . . .

ferner für eine Reihe von derselben Art:

$$539.\quad x^{p|\Delta x}.\cos x-(x+\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos(x+\Delta x)+\ldots\pm(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos(x+n\Delta x)$$

$$=\pm\frac{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}.\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]\pm(x-\Delta x)^{p}.\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\pm p\Delta x\frac{(x+n\Delta x)^{p-1|\Delta x}.\cos(x+n\Delta x)\pm(x-\Delta x)^{p-1|\Delta x}.\cos(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$

$$\pm p(p-1)(\Delta x)^2\frac{(x+n\Delta x)^{p-2|\Delta x}\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]\pm(x-\Delta x)^{p-2|\Delta x}.\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

$$\pm p(p-1)(p-2)(\Delta x)^3\frac{(x+n\Delta x)^{p-3|\Delta x}.\cos[x+(n-1)\Delta x]\pm(x-\Delta x)^{p-3|\Delta x}.\cos(x-2\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$

. . . .

In den Gleichungen No. 535., 536., 538. und 539. gilt das positive Zeichen für eine ungerade, das negative für eine gerade Glieder-Anzahl.

22.

Mémoire sur le calcul des variations des intégrales multiples.

(Par *M. Ostrogradsky.*)

Lu à l'Académie impériale des sciences de St. Petersbourg le 24 Janvier 1834.

(Extrait des Mémoires de cette Académie, Série VIe T. III.)

L'application de la méthode des variations aux fonctions qui ne renferment que les intégrales relatives à une seule variable ne laisse rien à desirer, ni du côté de la simplicité, ni de celui de la généralité. Mais il n'en est pas de même dans le cas, où il s'agirait de rechercher la variation d'une intégrale multiple, prise par rapport aux variables différentes. Certaines questions, relatives à ce cas, semblent exiger plus de généralité que n'en comporte la méthode des variations, telle que *Lagrange* l'a exposée. Ce qui pourrait faire croire, que les principes de ce grand Géomètre n'ont pas été convenablement appliqués, ou bien que les principes mêmes ne sont pas toujours suffisants.

C'est pour cela, peut-être, que Mr. *Poisson*, dans un mémoire qu'il a lu le 10 Novembre 1831 à l'Académie des sciences de Paris, a cru devoir ajouter aux principes du calcul des variations, posés par *Lagrange*, une espèce de nouveau principe, qui consiste à considerer les variables indépendantes de la question, comme fonctions d'autres variables accéssoires. Ces dernières disparaissent d'elles mêmes dans le cours du calcul; mais par leur considération, dans le cas de deux variables indépendantes x et y, M. *Poisson* a évité de supposer les variations δx et δy, la première indépendante de la quantité y, et la seconde indépendante de la quantité x: hypothèse que tous les géomètres, qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables indépendentes, ont été, en quelque sorte, forcé de faire par la nature même de leurs calculs.

Cependant la supposition δx indépendante de y et δy indépendante de x semble resulter des principes du calcul différentiel les plus simples

et les plus élémentaires, et tant qu'on n'a pas prouvé, que ces principes sont insuffisants, ou que l'application qu'on en avait fait est inéxacte, il restera à decider, si l'on doit préférer les formules de M. *Poisson* pour la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables à celles d'*Euler* et d'autres Géomètres relativement au même objet. A la verité, les dernières sont un cas particulier des premières; mais ce cas particulier est peut-être celui, qui doit toujours avoir lieu.

Cette question, nous la décidons pour les formules de Mr. *Poisson*. Nous démontrons, que les Géomètres, qui ont traité le calcul des variations des intégrales doubles, y compris *Euler* lui même, n'ont pas convenablement différentié avec la caractéristique δ les différences partielles de la variable principale. Mais on verra aussi, que l'introduction des variables accéssoires dans cette sorte de questions n'est point nécessaire. Le mémoire de M. *Poisson* sur le calcul des variations sera toujours cité dans l'histoire de l'analyse différentielle. C'est dans ce mémoire que l'on trouve, pour la première fois, la variation complète d'une intégrale double. Elle y est déduite de la considération des variables accessoires. Mais on peut s'en tenir aux principes de l'immortel auteur de la Mécanique analytique, principes qui réunissent toute la généralité désiderable et la plus grande simplicité.

Nous montrerons d'abord, dans ce qui va suivre, en quoi consiste l'inéxactitude échappée aux Géomètres qui ont cherché la variation des différences partielles d'une fonction à deux variables, et nous indiquerons ensuite un moyen pour trouver la variation d'une intégrale multiple quelconque.

1.

Designons par z une fonction de deux variables indépendantes x et y, et faisons $\frac{\partial z}{\partial x} = z'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z_{,}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{,}'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{,,}$, ainsi de suite; puis donnons aux quantités x, y, z, respectivement, les accroissemens simultanés δx, δy, δz, que nous regarderons comme fonctions infiniment petites et arbitraires de x et de y; par l'effet de ces accroissements, les quantités z', $z_{,}$, z'' .... deviendront, respectivement, $z' + \delta z'$, $z_{,} + \delta z_{,}$, $z'' + \delta z''$, ...; proposons nous de trouver les variations $\delta z'$, $\delta z_{,}$, $\delta z''$, ...

Considérons d'abord $\delta z'$. Comme $z' = \frac{\partial z}{\partial x}$, on avait cru que pour avoir $\delta z'$ il fallait différentier à l'ordinaire, selon δ, la quantité $\frac{\partial z}{\partial x}$, ce qui avait fourni un résultat inéxact $\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z' \frac{\partial \delta x}{\partial x}$. Pour découvrir la source de l'erreur il n'y a qu'à remonter à l'origine de la quantité $\delta z'$. Si l'on désigne, pour un instant, $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$, respectivement, par X, Y, Z, on aura évidemment

$$z' + \delta z' = \frac{\partial Z}{\partial X} \qquad \text{et} \qquad \delta z' = \frac{\partial Z}{\partial X} - z';$$

les différentielles partielles z' et $\frac{\partial Z}{\partial X}$ sont prises, la première, en regardant comme constant y, et la seconde, en considérant Y, c'est-à-dire $y + \delta y$, comme invariable; or, on avait cru, que les deux différences $\frac{\partial Z}{\partial X}$ et z' devaient être rapportées à la même hypothèse $\partial y = 0$, c'est en cela que l'on n'était pas exacte.

Remettons pour X, Y, Z leurs valeurs $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Nous aurons

$$\delta z' = \frac{\partial (z + \delta z)}{\partial (x + \delta x)} - z' = \frac{\partial (z + \delta z) - z' \partial (x + \delta x)}{\partial (x + \delta x)},$$

les différentielles $\partial (z + \delta z)$ et $\partial (x + \delta x)$ sont prises en faisant $\partial (y + \delta y) = 0$.

Or

$$\partial (z + \delta z) = \left(z' + \frac{\partial \delta z}{\partial x}\right) \partial x + \left(z_{,} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) \partial y,$$

$$\partial (x + \delta x) = \left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) \partial x + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \partial y,$$

$$\partial (y + \delta y) = \frac{\partial \delta y}{\partial x} \partial x + \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) \partial y;$$

en substituant les valeurs précédentes de $\partial (z + \delta z)$ et de $\partial (x + \delta x)$ dans la dernière expression de $\delta z'$, nous aurons

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} - z' \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) \partial x + \left(z_{,} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} - z' \frac{\partial \delta x}{\partial y}\right) \partial y}{\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right) \partial x + \frac{\partial \delta x}{\partial y} \partial y}$$

et en même temps

$$0 = \frac{\partial \delta y}{\partial x} \partial x + \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) \partial y;$$

en éliminant ∂x et ∂y, on trouve

$$\delta z' = \frac{\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial x} - z_{,}\frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial \delta z}{\partial y} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial y} - z_{,}\frac{\partial \delta y}{\partial y}\right)\frac{\partial \delta y}{\partial x}}{\left(1 + \frac{\partial \delta x}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right) - \frac{\partial \delta x}{\partial y}\cdot\frac{\partial \delta y}{\partial x}},$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniments petits du premier ordre

$$\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial x} - z_{,}\frac{\partial \delta x}{\partial x}.$$

Si l'on compare cette valeur de $\delta z'$ à celle $\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial x}$, on remarquera, qu'en rapportant la différence $\frac{\partial(z+\delta z)}{\partial(x+\delta x)}$ à l'hypothèse $\partial y = 0$, au lieu de $\partial(y+\delta y) = 0$, on supprime dans $\delta z'$ le terme $z_{,}\frac{\partial \delta y}{\partial y}$ qui est du même ordre de grandeur qu $\delta z'$, et qui, par les principes du calcul differeutiel, devait y être conservé.

Supposons que la quantité δy soit indépendante de x; nous aurons $\frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0$ et $\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial x}$, comme on le trouve par la différentiation ordinaire, selon δ, de la quantité $\frac{\partial z}{\partial x}$; or, il est facile de voir, que dans l'hypothèse $\frac{\partial \delta y}{\partial x} = 0$, la différentiation ordinaire est permise, car, comme alors $\partial(y+\delta y) = \left(1 + \frac{\partial \delta y}{\partial y}\right)\partial y$, en faisant $\partial(y+\delta y) = 0$, on aura évidemment $\partial y = 0$; donc, dans l'expression $\delta z' = \frac{\partial(z+\delta z)}{\partial(x+\delta x)} - z'$ les deux différences partielles z' et $\frac{\partial(z+\delta z)}{\partial(x+\delta x)}$ sont toutes deux relatives à une même hypothèse $\partial y = 0$.

Il est évident que

$$\delta z' = \frac{\partial \delta z}{\partial x} - z'\frac{\partial \delta x}{\partial x} - z_{,}\frac{\partial \delta y}{\partial x} = z''\delta x + z_{,}'\delta y + \frac{\partial(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial x}.$$

On trouvera de la même manière

$$\delta z_{,} = z_{,}'\delta x + z_{,,}\delta y + \frac{\partial(\delta z - z'\delta x - z_{,}\delta y)}{\partial y}.$$

Pour passer aux différences secondes, on remarquera que

$$\delta z'' = \frac{\partial(z'+\delta z')}{\partial(x+\delta x)} - z'',$$

$$\delta z_{,}' = \frac{\partial(z'+\delta z')}{\partial(y+\delta y)} - z_{,}' = \frac{\partial(z_{,}+\delta z_{,})}{\partial(x+\delta x)} - z_{,}',$$

$$\delta z_{,,} = \frac{\partial(z_{,}+\delta z_{,})}{\partial(y+\delta y)} - z_{,,}.$$

Observons que les termes indépendants de Du, dans les formules précédentes, reviennent aux différentielles ordinaires des quantités u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ .... considérées comme fonctions de x, y, z .... et en supposant que les accroissements de x, y, z .... soient $\delta x, \delta y, \delta z$ .... si donc, nous désignons par la caractéristique Δ la différentielle d'une fonction de x, y, z ...., différentielle due aux accroissements $\delta x, \delta y, \delta z$ ...., nous pourrons écrire

$$\delta u = \Delta u + Du,$$
$$\delta \frac{\partial u}{\partial x} = \Delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Du}{\partial x},$$
$$\delta \frac{\partial u}{\partial y} = \Delta \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Du}{\partial y},$$
$$\delta \frac{\partial u}{\partial z} = \Delta \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial Du}{\partial z},$$

. . . .

Il n'est pas difficile de trouver la variation des différences supérieures $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, ...; on verra avec facilité que l'on a en général

$$\delta \frac{\partial^h u}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \dots} = \Delta \frac{\partial^h u}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \dots} + \frac{\partial^h Du}{\partial x^l \partial y^m \partial z^n \dots}.$$

3.

Ce qui précéde, suffit pour trouver la variation d'une fonction U de u, x, y, z et des différences partielles de la variable principale u par rapport aux quantités x, y, z .... Il n'y a qu'à différentier U en y faisant croitre toutes les quantités x, y, z .... et toutes les fonctions u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ .... de leurs variations δ. Or, les variations δu, $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$ .... étant composées chacune de deux parties infiniment petites, on peut, par les principes du calcul différentiel, en augmentant x, y, z .... respectivement de $\delta x, \delta y, \delta z$ .... ne faire croitre d'abord les fonctions u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ .... que des premières parties Δu, $\Delta \frac{\partial u}{\partial x}$ .... de leurs variations, il en resultera dans U un accroissement qui formera la première partie de la variation δU; puis, en laissant x, y, z .... les mêmes, on augmentera la fonction u et ses différences de secondes parties Du, $\frac{\partial Du}{\partial x}$ .... de leurs variations; l'augmentation qu'en recevra la fonction U, formera la seconde partie de sa variation. . . . .

La première partie de la variation δU sera évidemment

$$\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z+\ldots.$$

en faisant varier dans les différences $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \ldots.$ dans la première, tout ce qui varie avec x, dans la seconde, tout ce qui varie avec y, dans la troisième, tout ce qui varie avec z, ainsi de suite. Désignons par DU la seconde partie de la variation δU; cette partie est due à l'accroissement Du de la quantité u, accroissement qu'on doit appliquer à u partout où cette fonction se trouve dans U; nous aurons

$$\delta U=\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z+\ldots.+DU.$$

Nous nous dispensons d'écrire le developpement de la différentielle DU.

4.

Proposons nous de trouver la variation de l'intégrale définie

$$V=\mathbf{S}U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

prise pour toutes les valeurs de $x, y, z \ldots.$ qui satisfassent à l'inégalité

$$L<0,$$

L étant une fonction de $x, y, z \ldots.$

La variation de l'intégrale $\mathbf{S}U\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots.$ est, bien évidemment, égale à la somme des variations de tous ses élémens différentiels; ainsi, pour avoir δV, il n'y a qu'à prendre l'intégrale de la variation $\delta(U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)$, ce qui donnera

$$\delta V=\mathbf{S}\,\delta(U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.).$$

Or, on a, par le principe du calcul différentiel,

$$\delta(U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)=\delta U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.+U\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.),$$

c'est-à-dire, en vertu du §. précédent

$$\delta(U\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z+\ldots.\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots. +U\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)+DU\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.;$$

donc

$$\delta V=\mathbf{S}\left[\frac{\partial U}{\partial x}\delta x+\frac{\partial U}{\partial y}\delta y+\frac{\partial U}{\partial z}\delta z+\ldots.+U\frac{\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)}{\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.}\right]\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots. +\mathbf{S}DU\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

Nous démontrerons tout-à-l'heure que

$$\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.)=\left(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}+\ldots.\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.;$$

il en resultera.

$$\delta V = \mathrm{S}\left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(U\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(U\delta z)}{\partial z} + \ldots\right] \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots + \mathrm{S}\, DU\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

Dans les différentielles partielles $\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x}$, $\frac{\partial(U\delta y)}{\partial y}$, $\frac{\partial(U\delta z)}{\partial z}$ .... on doit faire varier, dans la première, tout ce qui varie avec x, dans la seconde, tout ce qui varie avec y, dans la troisième, tout ce qui varie avec z, ainsi de suite.

5.

Nous allons nous occuper maintenant de la variation $\delta(\partial x\, \partial y\, \partial z \ldots)$.

Supposons $x + \delta x = X$, $y + \delta y = Y$, $z + \delta z = Z$, ... nous aurons

$$\delta(\partial x\, \partial y\, \partial z \ldots = \partial X\, \partial Y\, \partial Z \ldots - \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$$

Les quantités X, Y, Z, ... étant fonctions de x, y, z ...., pour avoir une des différentielles ∂X, ∂Y, ∂Z, ..., par exemple ∂X, il n'y a qu'à différentier à l'ordinaire la quantité X, en regardant Y, Z .... comme constants, ce qui donnera

$$\begin{aligned} \partial X &= \frac{\partial X}{\partial x}\partial x + \frac{\partial X}{\partial y}\partial y + \frac{\partial X}{\partial z}\partial z + \ldots \\ 0 &= \frac{\partial Y}{\partial x}\partial x + \frac{\partial Y}{\partial y}\partial y + \frac{\partial Y}{\partial z}\partial z + \ldots \\ 0 &= \frac{\partial Z}{\partial x}\partial x + \frac{\partial Z}{\partial y}\partial y + \frac{\partial Z}{\partial z}\partial z + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

d'où l'on tirera

$$\partial X = \frac{\mathrm{S}\left(\frac{\partial X}{\partial x} \cdot \frac{\partial Y}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \ldots\right)}{\mathrm{S}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} \cdot \frac{\partial Z}{\partial z} \ldots\right)} \partial x.$$

On a designé, d'après Mr. *Cauchy*, par la notation

$$\mathrm{S}(a, b, c \ldots)$$

le resultat de l'élimination des quantités p, q, r, ... satisfaisant aux équations

$$\begin{aligned} 0 &= ap + a_1 q + a_2 r + \ldots \\ 0 &= bp + b_1 q + b_2 r + \ldots \\ 0 &= cp + c_1 q + c_2 r + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

On suppose que le terme $a b_1 c_2 \ldots$ de ce resultat soit pris avec le signe *plus*.

Pour trouver ∂Y il faut différencier Y en faisant $\partial X=0$, $\partial Z=0\dots$ c'est-à-dire, en faisant $\partial x=0$, $\partial Z=0\dots$ ce qui donne

$$\partial Y=\frac{\partial Y}{\partial y}\partial y+\frac{\partial Y}{\partial z}\partial z+\dots$$
$$0=\frac{\partial Z}{\partial y}\partial y+\frac{\partial Z}{\partial z}\partial z+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

d'où

$$\partial Y=\frac{\int\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)}{\int\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)}\partial y;$$

on trouvera de la même manière

$$\partial Z=\frac{\int\left(\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)}{\int(\dots)}\partial z,$$

ainsi de suite. Le dénominateur de l'expression de la dernière différentielle sera l'unité; car, si par exemple, Z était la dernière variable, on aurait eu

$$\partial Z=\frac{\partial Z}{\partial z}\partial z.$$

En faisant le produit $\partial X\partial Y\partial Z\dots$ on trouve

$$\partial X\partial Y\partial Z\dots=\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)\partial x\partial y\partial z+\dots,$$

donc

$$\delta(\partial x\partial y\partial z\dots)=\left[\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)-1\right]\partial x\partial y\partial z\dots$$

Les principes de l'analyse différentielle exigent que dans le calcul du coefficient

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)-1$$

on ne tienne compte que des infiniments petits du premier ordre, car $\frac{\delta(\partial x\partial y\partial z\dots)}{\partial x\partial y\partial z}$ est une quantité infiniment petite de cet ordre. Or, si l'on excepte $\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots$, tous les autres termes de la somme $\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)$ sont infiniments petits au moins du second ordre; donc, aux quantités de cet ordre près, on aura

$$\int\left(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots\right)=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\dots$$

et par suite

$$\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.) = \Big(\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{\partial Z}{\partial z}\cdots-1\Big)\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

Remettons pour $X, Y, Z\ldots.$ leurs valeurs $x+\delta x$, $y+\delta y$, $z+\delta z\ldots.$ nous aurons

$$\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.) = \Big[\Big(1+\frac{\partial\delta x}{\partial x}\Big)\Big(1+\frac{\partial\delta y}{\partial y}\Big)\Big(1+\frac{\partial\delta z}{\partial z}\Big)\cdots-1\Big]\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

ou bien, en ne tenant compte que des infiniments petits du premier ordre,

$$\delta(\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.) = \Big(\frac{\partial\delta x}{\partial x}+\frac{\partial\delta y}{\partial y}+\frac{\partial\delta z}{\partial z}+\cdots\Big)\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

6.

Déterminons, avant d'aller plus loin, quelles doivent être les limites des variables $x, y, z\ldots.$ dans l'intégrale

$$\int U\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

étendue à toutes les valeurs de $x, y, z\ldots.$ qui satisfassent à l'inégalité $L>0$, ensorte qu'aux limites de cette intégrale on aura $L=0$. On se propose d'intégrer d'abord par rapport à x, ensuite par rapport à y, après par rapport à z, ainsi de suite.

Admettons que l'équation $L=0$, resolue par rapport à x, ne fournisse pour cette variable que deux valeurs X_0 et X, ces valeurs sont les limites de la variable x et, en supposant que la fonction L reste négative pour les quantités x comprises entre X_0 et X, on intégrera l'expression

$$\int U\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

depuis $x=$ à la plus petite des deux racines X_0 et X, jusqu'à $x=$ à la plus grande de ces racines. Quant aux quantités $y, z\ldots.$ on doit leur donner toutes les valeurs qui fournissent pour X_0 et X des quantités réelles, et, au contraire, on doit exclure les valeurs de $y, z\ldots.$ qui rendent imaginaires X_0 et X; or, dans le passage du réel à l'imaginaire, les racines X_0 et X deviennent, comme on le sait par la théorie des équations, égales entr'elles; donc aux limites de $y, z\ldots.$ on aura à la fois

$$L=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x}=0.$$

En éliminant x de ces deux équations on en obtiendra une en $y, z\ldots.$ qui appartiendra aux limites de ces variables, et qui fournira, supposons le, pour y deux valeurs Y_0 et Y, valeurs qui seront les limites entre lesquelles il faudra intégrer $\int U\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$ par rapport à y; on prendra

l'intégrale depuis la plus petite des deux quantités Y_0 et Y jusqu'à la plus grande.

On parviendra à la même conclusion, de la manière suivante: après avoir intégré par rapport à x, on doit intégrer par rapport à y évidemment depuis la plus petite jusqu'à la plus grande valeur de cette variable en supposant toutefois que x et y soient liés par l'équation $L=0$, et en considérant z .... comme constante. Si l'on différentie dans cette hypothèse, on trouve

$$0=\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx};$$

or, pour que y soit maximum ou minimum, il faut qu'on ait $\frac{\partial y}{dx}=0$, ce qui donne pour la limite de y la même équation $\frac{dL}{\partial x}=0$, que nous avons déjà trouvée.

Pour avoir les limites relatives à la variable z, on traitera l'équation qui résulte de l'élimination de x entre $L=0$ et $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ comme on a traité l'équation $L=0$; or, on peut supposer que le résultat de l'élimination de la variable x entre $L=0$ et $\frac{\partial L}{\partial x}=0$ est l'équation même $L=0$, dans laquelle on a mis pour x sa valeur tirée de $\frac{\partial L}{\partial x}=0$; donc, pour trouver les limites de z, on différentiera $L=0$ par rapport à y en considérant x comme fonction de y; ce qui donnera

$$\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}=0$$

ou bien $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, à cause de $\frac{\partial L}{\partial x}=0$; en éliminant y entre $L=0$ et $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, on trouvera une équation qui fournira les limites pour z. En continuant de la même manière, on trouvera les limites pour toutes les variables qui entrent dans l'intégrale

$$\int U\partial x\partial y\partial z\ \ldots.$$

Ainsi, en résumant, les limites de x sont immédiatement données par la résolution de l'équation $L=0$; on trouve les limites de y en resolvant par rapport à cette variable l'équation, resultante de l'élimination de x entre $L=0$, $\frac{\partial L}{\partial x}=0$; on trouve les limites de z en resolvant par rapport à cette variable l'équation, resultante de l'élimination de x et y entre $L=0$, $\frac{\partial L}{\partial x}=0$, $\frac{\partial L}{\partial y}=0$, ainsi de suite.

Nous avons supposé que les équations relatives aux limites de l'intégrale

$$\int U\,dx\,dy\,dz\ldots.$$

ne fournissaient pour chaque quantité $x, y, z \ldots.$ que deux valeurs; mais il serait facile, d'après ce qui précéde, de traiter le cas où les équations dont il s'agit, fourniraient plus de deux racines. Le nombre des valeurs limites pour chaque variable $x, y, z \ldots.$, en y comprennant s'il est nécessaire les quantités infinies, doit être pair.

7.

Reprenons la variation

$$\delta V = \int\left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(U\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(U\delta z)}{\partial z} + \cdots\right]\partial x\,\partial y\,\partial z\cdots + \int D\,U\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.,$$

faisons y, pour abréger, $U\delta x = P$, $U\delta y = Q$, $U\delta z = R$, nous aurons

$$\delta V = \int\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \cdots\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\cdots + \int D\,U\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

Considérons d'abord la partie

$$\int\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \cdots\right)\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots.$$

de la variation précédente; supposons que de deux valeurs X_0 et X, que fournit pour x l'équation $L = 0$, X soit la plus grande: nous aurons

$$\int\frac{\partial P}{\partial x}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots = \int(P_X - P_{X_0})\,\partial y\,\partial z\ldots.;$$

on désigne par P_X ce que devient P quand on y met X pour x, et par P_{X_0} ce que devient P pour $x = X_0$.

Comme la fonction L a une valeur positive avant de s'évanouir pour $x = X_0$, et une valeur négative avant de s'évanouir pour $x = X$, il s'ensuit que la dérivée $\frac{\partial L}{\partial x}$ est négative pour $x = X_0$, et qu'elle est positive pour $x = X$: donc en prenant le radical $\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}$ positivement, on aura

$$-P_{X_0} = \frac{P\frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}}\ \text{pour}\ x = X_0,$$

$$P_X = \frac{P\frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}}\ \text{pour}\ x = X.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $\int\frac{\partial P}{\partial x}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots. = \int(P_X - P_{X_0})\,\partial y\,\partial z\ldots.$ nous aurons

$$\int \frac{\partial P}{\partial x} \partial x \, \partial y \, \partial z \ldots . = \int \frac{P \frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} \partial y \, \partial z \ldots .;$$

l'intégrale du second membre ne comprend que les valeurs de $x, y, z \ldots .$ qui satisfont à l'équation $L = 0$.

On trouvera de la même manière

$$\int \frac{\partial Q}{\partial y} \partial x \, \partial y \, \partial z \ldots . = \int \frac{Q \frac{\partial L}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}} \partial x \, \partial z \ldots .$$

$$\int \frac{\partial R}{\partial z} \partial x \, \partial y \, \partial z \ldots . = \int \frac{R \frac{\partial L}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial z^2}\right)}} \partial x \, \partial y \ldots .$$

et par suite

$$(A.) \quad \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \cdots\right) \partial x \, \partial y \, \partial z \ldots . =$$

$$\int \frac{P \frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} \partial y \, \partial z \ldots . + \int \frac{Q \frac{\partial L}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}} \partial x \, \partial z \ldots . + \int \frac{R \frac{\partial L}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial z^2}\right)}} \partial x \, \partial y \ldots . + \cdots;$$

les intégrales du second membre de cette équation doivent être étendues à toutes les valeurs de $x, y, z \ldots .$ qui satisfassent à l'équation $L = 0$. Considérons deux de ces intégrales, par exemple

$$\int \frac{P \frac{\partial L}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} \partial y \, \partial z \ldots . \quad \text{et} \quad \int \frac{Q \frac{\partial L}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}} \partial x \, \partial z \ldots .$$

D'après l'article précédent, ont peut facilement s'assurer que leurs limites relatives aux variables $z, \ldots .$ sont les mêmes; de plus on aura

$$\frac{\partial L}{\partial x} \partial x + \frac{\partial L}{\partial y} \partial y = 0$$

pour tous les élémens de ces intégrales où les variables $z \ldots .$ restent les mêmes; ensorte que les différentielles $\frac{\partial L}{\partial x} \partial x$ et $\frac{\partial L}{\partial y} \partial y$ sont égales au signe près; donc, en prenant positivement les accroissements ∂x et ∂y, et les radicaux $\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}$, $\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}$, on aura

$$\frac{\partial y}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} = \frac{\partial x}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}},$$

ou bien, en multipliant par $\partial z \ldots\ldots$

$$\frac{\partial y \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} = \frac{\partial x \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}}.$$

Il est facile d'en conclure qu'on aura en général

$$\frac{\partial y \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} = \frac{\partial x \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}} = \frac{\partial x \partial y \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial z^2}\right)}} = \ldots\ldots$$

d'où, en faisant pour abréger $\partial s = \sqrt{(\partial y^2 \partial z^2 \ldots\ldots + \partial x^2 \partial z^2 \ldots\ldots + \partial x^2 \partial y^2 \ldots\ldots + \ldots\ldots)}$,

$$\frac{\partial y \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} = \frac{\partial x \partial z \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial y^2}\right)}} = \frac{\partial x \partial y \ldots\ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial z^2}\right)}} = \ldots\ldots = \frac{\partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\ldots\right)}};$$

en vertu de ces égalités, l'équation (*A.*) deviendra

$$(B.) \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \ldots\ldots\right) \partial x \partial y \partial z \ldots\ldots = \int \frac{\left(P\frac{\partial L}{\partial x} + Q\frac{\partial L}{\partial y} + R\frac{\partial L}{\partial z} + \ldots\ldots\right)\partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\ldots\right)}}.$$

On peut, pour rendre plus facile l'intégration de la différentielle

$$\frac{\left(P\frac{\partial L}{\partial x} + Q\frac{\partial L}{\partial y} + R\frac{\partial L}{\partial z} + \ldots\ldots\right)\partial s.}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\ldots\right)}}$$

à la place des variables $x, y, z \ldots\ldots$, liées par l'équation $L = 0$, introduire d'autres variables $a, b \ldots\ldots$ indépendantes entr'elles.

On transformera, par la méthode connue, tous les élémens $\partial y \partial z \ldots\ldots$, $\partial x \partial z \ldots\ldots$, $\partial x \partial y \ldots\ldots$; $\ldots\ldots$ en élémens proportionnels au produit $\partial a \partial b \ldots\ldots$, on trouvera $\partial y \partial z \ldots\ldots = A \partial a \partial b \ldots\ldots$, $\partial x \partial z \ldots\ldots = B \partial a \partial b \ldots\ldots$, $\partial x \partial y \ldots\ldots = C \partial a \partial b \ldots\ldots$, $\ldots\ldots$ $A, B, C, \ldots\ldots$ étant fonctions finies de $a, b, \ldots\ldots$; ce qui donnera

$$\partial s = \partial a \partial b \ldots\ldots \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2 + \ldots\ldots)}.$$

Si l'on veut par exemple intégrer par rapport aux variables $y, z \ldots\ldots$, on fera attention à ce que dans les élémens $\partial x \partial z \ldots\ldots$, $\partial x \partial y \ldots\ldots$, $\ldots\ldots$ on doit prendre la différentielle de la variable x en considérant dans la première la quantité y comme seule variable, dans la seconde la quantité z comme seule variable, ainsi de suite; il en resultera que $\partial x \partial z \ldots\ldots = \frac{\partial x}{\partial y} \partial y \partial z \ldots\ldots$, $\partial x \partial y \ldots\ldots = \frac{\partial x}{\partial z} \partial y \partial z \ldots\ldots$, $\ldots\ldots$; donc

$$\partial s = \partial y\,\partial z \ldots \sqrt{\left(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial x^2}{\partial z^2} + \ldots\right)} = \partial y\,\partial z \ldots \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}}$$

en sorte que

$$(C.) \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} + \ldots\right) \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots = \int \frac{\left(P\frac{\partial L}{\partial x} + Q\frac{\partial L}{\partial y} + R\frac{\partial L}{\partial x} + \ldots\right)\partial y\,\partial z \ldots}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}}$$

Remettons dans la formule (*B.*) pour *P, Q, R* .... leurs valeurs $U\delta x$, $U\delta y$, $U\delta z$ .... nous aurons

$$\int \left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(U\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(U\delta z)}{\partial z} + \ldots\right] \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots = \int \frac{U\left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial y}\delta y + \frac{\partial L}{\partial z}\delta z + \ldots\right)\partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\right)}}$$

ou bien

$$\int \left[\frac{\partial(U\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(U\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(U\delta z)}{\partial z} + \ldots\right] \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots = \int \frac{U\delta L\,\partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\right)}}$$

et par suite

$$\delta V = \int \frac{U\delta L\,\partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \ldots\right)}} + \int DU\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

8.

Nous allons maintenant indiquer les réductions à faire dans le terme $\int DU\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$ de la variation δV, réductions qui consistent à faire disparaître, autant que possible, les différences partielles de la quantité DU sous le signe $\int$

Au moyen de la formule (*B.*) de l'article précédent, il sera facile de remplacer l'intégrale $\int DU\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$ par la somme de deux autres intégrales $\int W\,DU\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$ et $\int \Theta\,\partial s$, dont la première est, comme $\int DU\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$ relative à toutes les valeurs de $x, y, z \ldots$ qui satisfassent à l'inégalité $L < 0$, et dont la seconde ne comprend que les valeurs des mêmes variables, qui satisfont à l'équation $L = 0$. La fonction W ne renferme point la variation Du; la fonction Θ au contraire la renferme, ainsi que ses différences partielles par rapport à $x, y, z \ldots$; quant à la différentielle ∂s, elle est la même que dans l'article précédent, c'est-à-dire:

$$\partial s = \sqrt{(\partial y^2 \partial z^2 \ldots . + \partial x^2 \partial z^2 \ldots . + \partial x^2 \partial y^2 \ldots . + \cdots)};$$

ainsi nous aurons

$$\int DU \partial x \partial y \partial z \ldots . = \int W Du \partial x \partial y \partial z \ldots . + \int \Theta \partial s,$$

et par suite

$$\delta V = \int W Du \partial x \partial y \partial z \cdots + \int \frac{U \delta L \partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \cdots\right)}} + \int \Theta \partial s.$$

Les intégrales $\int W Du \partial x \partial y \partial z \ldots .$ et $\int \frac{U \delta L \partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \cdots\right)}}$ ne sont plus susceptibles d'aucune réduction, mais l'intégrale $\int \Theta \partial s$ peut encore être réduite.

Pour opérer la réduction de $\int \Theta \partial s$ il faut avant tout remplacer les variables $x, y, z \ldots .$ liées entr'elles par l'équation $L = 0$, par d'autres quantités $a, b \ldots .$ indépendantes entr'elles. Le nombre de quantités $a, b \ldots .$ doit être inférieur d'une unité à celui des variables primitives $x, y, z \ldots .$

En regardant $x, y, z \ldots .$ comme fonction de $a, b \ldots .$ transformons l'élément ∂s en élément proportionel au produit $\partial a \partial b \ldots .$, on trouvera

$$\partial s = K \partial a \partial b \ldots .$$

K étant une fonction finie de $a, b \ldots .$; transformons aussi les différentielles $\frac{\partial Du}{\partial x}, \frac{\partial Du}{\partial y}, \frac{\partial Du}{\partial z}, \ldots . \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}, \ldots .$ en $\frac{\partial Du}{\partial a}, \frac{\partial Du}{\partial b}, \ldots . \frac{\partial^2 Du}{\partial a^2}, \frac{\partial^2 Du}{\partial a \partial b}, \ldots .$ nous aurons pour cet objet:

$$\frac{\partial Du}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial z} + \ldots .$$

$$\frac{\partial Du}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial z} + \ldots .$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial a^2} = \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y} + \ldots .$$

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial a \partial b} = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial y}{\partial a}\right) \frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y} + \ldots .$$

. . . .

Mais comme les équations précédentes ne sont pas en nombre suffisant pour en tirer la valeur de toutes les quantités $\frac{\partial Du}{\partial x}, \frac{\partial Du}{\partial y},$

$\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... quelques unes de ces différentielles resteront indéterminées, les autres s'exprimeront au moyen de celle-ci et des quantités $\frac{\partial Du}{\partial a}$, $\frac{\partial Du}{\partial b}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial a \partial b}$, ... Au lieu de considérer comme indéterminées quelques unes des différentielles $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... il convient, pour plus de symétrie dans le calcul, d'introduire autant de fonctions linéaires p, q, r, ... $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... qu'il en faudra pour exprimer toutes les quantités $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... en p, q, r, ... $\frac{\partial Du}{\partial a}$, $\frac{\partial Du}{\partial b}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial a^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial a \partial b}$, ... et ce sont les fonctions p, q, r, ... qu'on laissera arbitraires.

Or, introduire les quantités p, q, r, ..., revient évidemment à feindre parmi les variables a, b, ... une variable w de plus; alors, le nombre de quantités w, a, b, ... étant égal à celui des variables x, y, z, ..., en considérant x, y, z, ... comme fonctions de w, a, b, ..., on trouve autant d'équations

$$\frac{\partial Du}{\partial w} = \frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial Du}{\partial z} + \ldots.$$

$$\frac{\partial Du}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial a} \cdot \frac{\partial Du}{\partial z} + \ldots.$$

$$\frac{\partial Du}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial b} \cdot \frac{\partial Du}{\partial z} + \ldots.$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2} = \frac{\partial x^2}{\partial w^2} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{\partial y}{\partial w} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y} + \ldots.$$

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial w \partial a} = \frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial x}{\partial w} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial y}{\partial w}\right) \frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y} + \ldots.$$

. . . .

qu'il en faut pour exprimer toutes les différentielles $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... en $\frac{\partial Du}{\partial w}$, $\frac{\partial Du}{\partial a}$, $\frac{\partial Du}{\partial b}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial w \partial a}$, ... mais comme la variable w réélement n'existe pas, on doit regarder les différentielles $\frac{\partial x}{\partial w}$, $\frac{\partial y}{\partial w}$, $\frac{\partial z}{\partial w}$, ... $\frac{\partial^2 x}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial w^2}$, ... comme quantités dont

on pourra disposer pour simplifier l'expression de $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... Quant aux différentielles $\frac{\partial Du}{\partial w}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2}$, ... elles doivent rester entièrement indéterminées.

Ayant exprimé les différentielles $\frac{\partial Du}{\partial x}$, $\frac{\partial Du}{\partial y}$, $\frac{\partial Du}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}$, ... en $\frac{\partial Du}{\partial w}$, $\frac{\partial Du}{\partial a}$, $\frac{\partial Du}{\partial b}$, ... $\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2}$, $\frac{\partial^2 Du}{\partial w \partial a}$, ... il faut mettre leurs valeurs dans l'intégrale $\int \Theta \, \partial s = \int \Theta K \, \partial a \, \partial b \dots$, après quoi on pourra, en faisant usage de la formule (B.) et en supposant pour abréger $\partial s' = \sqrt{(\partial b^2 \dots + \partial a^2 \dots + \dots)}$, remplacer l'intégrale $\int \Theta K \, \partial a \, \partial b \dots$ par la somme

$$\int \left(PDu + Q\frac{\partial Du}{\partial w} + R\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2} + \dots\right) \partial a \, \partial b \dots + \int \Phi \, \partial s'$$

de deux intégrales $\int \left(PDu + Q\frac{\partial Du}{\partial w} + R\frac{\partial^2 Du}{\partial w} + \dots\right) \partial a \, \partial b \dots$ et $\int \Phi \, \partial s'$, dont la première n'est plus susceptible d'aucune reduction, et dont la seconde peut être réduite de la même manière que l'intégrale $\int \Theta \, \partial s$.

Nous aurons

$$\delta V = \int W \, Du \, \partial x \, \partial y \, \partial z \dots + \int \frac{U \, \delta L \, \partial s}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2} + \dots\right)}}$$
$$+ \int \left(PDu + Q\frac{\partial Du}{\partial w} + R\frac{\partial^2 Du}{\partial w^2} + \dots\right) \partial a \, \partial b + \dots + \int \Phi \, \partial s'.$$

L'on traitera l'intégrale $\int \Phi \, \partial s'$ comme on a traité $\int \Theta \, \partial s$, on la décomposera en deux autres, dont l'une sera entièrement réduite, et l'autre encore susceptible de reductions; en continuant de la même manière, on épuisera, en quelque sorte, toutes les réductions à faire dans les intégrales qui se présenteront les unes après les autres; alors la variation δV aura reçu la forme propre aux applications.

9.

Comme l'intégrale $\int \Theta \, \partial s$ de l'article précédent est relative aux valeurs de x, y, z .... qui satisfont à l'équation $L = 0$, on peut regarder une de ces quantités comme fonction de toutes les autres, et celles-ci comme indépendantes entr'elles. Considérons, par exemple, x comme fonction de y, z .... nous aurons d'après l'article 7.

$$\partial s = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}+\frac{\partial L^2}{\partial y^2}+\frac{\partial L^2}{\partial z^2}+\ldots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial z^2}\right)}}\,\partial y\,\partial z \ldots$$

et en faisant pour abréger

$$\frac{\Theta\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}+\frac{\partial L^2}{\partial y^2}+\frac{\partial L^2}{\partial z^2}+\ldots\right)}}{\sqrt{\left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\right)}} = \Psi,$$

nous trouverons

$$\int\Theta\,\partial s = \int\Psi\,\partial y\,\partial z \ldots$$

On obtiendra l'équation relative aux limites de $y, z \ldots$ en éliminant x entre $L=0$ et $\frac{\partial L}{\partial x}=0$.

La fonction Ψ renferme les différences partielles $\frac{\partial Du}{\partial x}, \frac{\partial Du}{\partial y}, \frac{\partial Du}{\partial z}, \ldots$ $\ldots \frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial y}, \ldots$ prises relativement à $x, y, z \ldots$ dans l'hypothèse que ces variables sont indépendantes entre elles; mais après la différentiation on doit y mettre pour x sa valeur, fournie par l'équation $L=0$. Il est bon d'éliminer autant que possible les différences dont nous parlons; pour cet objet, en considérant x comme fonction de $y, z \ldots$, nous aurons:

$$\frac{\partial Du}{\partial y} = \left(\frac{\partial Du}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial Du}{\partial z} = \left(\frac{\partial Du}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z},$$

. . . .

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z} = \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial z},$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x^2}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial y\,\partial z} = \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y\,\partial z}\right)+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial y}+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}+\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 Du}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial z}\right)+2\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial z}\right)\frac{\partial x}{\partial z}+\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2},$$

. . . .

nous avons entouré de parenthèses les différences partielles de la quantité Du, prises en considérant x, y, z .... comme indépendante entr'elles.

On tire des équations précédentes:

$$\left(\frac{\partial Du}{\partial y}\right) = \frac{\partial Du}{\partial y} - \left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial Du}{\partial z}\right) = \frac{\partial Du}{\partial z} - \left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial z},$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial y},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x \partial z}\right) = \frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z} - \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial z},$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^2 Du}{\partial y^2} - 2\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial y^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y \partial z}\right) = \frac{\partial^2 Du}{\partial y \partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} - \left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial^2 Du}{\partial z^2} - 2\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\frac{\partial x^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial z^2},$$

. . . .

ou bien, en mettant pour $\frac{\partial x}{\partial y}$, $\frac{\partial x}{\partial z}$, ... $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z}$, $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$, ... leurs valeurs, tirées de l'équation $L = 0$,

$$\left(\frac{\partial Du}{\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial Du}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y}\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\frac{\partial L}{\partial x}},$$

$$\left(\frac{\partial Du}{\partial z}\right) = \frac{\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial Du}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial z}\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\frac{\partial L}{\partial x}},$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial L}{\partial x}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x\,\partial z}\right) = \frac{\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial L}{\partial x}},$$

. . . .

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y^2}\right) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}\left[\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 Du}{\partial y^2} + 2\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\right]\\ + \left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - 2\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial L^2}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\end{array}\right\}}{\frac{\partial L^3}{\partial x^3}},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial y\,\partial z}\right) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}\left[\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 Du}{\partial y\,dz} + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial y} + \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\right]\\ + \left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\end{array}\right\}}{\frac{\partial L^3}{\partial x^3}},$$

$$\left(\frac{d^2 Du}{dz^2}\right) = \frac{\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial L}{\partial x}\left[\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 Du}{\partial z^2} + 2\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)}{\partial z} + \frac{\partial L^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right)\right]\\ + \left(\frac{\partial L^2}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} - 2\frac{\partial L}{\partial x}\cdot\frac{\partial L}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 L}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right)\end{array}\right\}}{\frac{\partial L^3}{\partial x^3}},$$

. . . .

En substituant ces valeurs dans

$$\int \Theta\,\partial s = \int \Psi\,\partial y\,\partial z\ldots. \quad .$$

et en employant la formule ($C.$) de l'article 7., on remplacera l'intégrale $\int \Psi\,\partial y\,\partial z\ldots.$ par la somme

$$\int\left[P Du + Q\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right) + \ldots.\right]\partial y\,\partial z\ldots. + \int \Phi\,\partial z\ldots.$$

des deux intégrales $\int\left[PDu + Q\left(\frac{\partial Du}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial^2 Du}{\partial x^2}\right) + \ldots\right]\partial y\, \partial z \ldots$ et $\int \Phi\, \partial z \ldots$ dont la premièra est toute réduite, et dont la seconde peut être encore susceptible de réductions. Cette dernière est relative aux variables $z \ldots$ Ses limites dépendent de l'équation qu'on obtiendra en éliminant x et y entre $L = 0$, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$; enfin elle est toute semblable à l'intégrale $\int \Psi\, \partial y\, \partial z \ldots$ et on la traitera de la même manière.

Nous n'avons fait qu'indiquer les transformations qu'on doit faire subir à la partie $\int DU\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots$ de la variation δV; parceque ces transformations, se réduisant à l'intégration par parties, appartiennent plutôt au Calcul Intégral, qu'à la méthode des variations. A la vérité, un des principes fondamentaux de cette dernière méthode consiste à faire disparaître, autant que possible, les différentielles des Variations qui se trouvent sous un signe intégral; mais le calcul des Variations ne fait qu'indiquer cette opération et en laisse l'exécution au Calcul Intégral.

23.

Über die Summation periodischer Reihen und die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$.

(Von Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

1.

Es existiren Reihen, die, nach den Potenzen einer Variabeln x geordnet, für alle innerhalb zweier Zahlen a und b fallende Werthe von x convergiren, für den einen oder andern dieser Grenzwerthe hingegen, unbestimmt werden. Bilden nun die im Bereiche dieser Unbestimmtheit fallenden Werthe der Reihe eine Periode, so ist für diesen Grenzwerth der Variabeln, mit Beschränkungen, die wir in der Folge angeben werden, das arithmetische Mittel sämmtlicher unbestimmten Werthe, die die Periode darbietet, der wahre Werth der Reihe. Eine Reihe dieser Art ist folgende:

$$1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\text{etc.},$$

welche für alle Werthe von x, die ächte Brüche sind, convergirt und für $x=1$ abwechselnd die Werthe 1 und 0 darbietet. Leibnitz, der auf diesen Fall einen Grundsatz der Wahrscheinlichkeits-Rechnung anwandte, folgerte: da man mit gleichem Rechte 1 und 0 als Werthe dieser Reihe für $x=1$ annehmen kann, so ist das arithmetische Mittel $\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$ der wahre Werth derselben. In der That giebt auch der erzeugende Bruch dieser Reihe, nemlich $\frac{1}{1+x}$, für $x=1$ den Werth $\frac{1}{2}$, welches Resultat mit dem des arithmetischen Mittels übereinstimmt. Diese Übereinstimmung veranlafste Daniel Bernoulli, nach demselben Principe mehrere analoge Reihen anzugeben.

In den folgenden Blättern werden wir zuerst den Grund dieser Übereinstimmung nachweisen und hierauf, als Anwendung, das Integral $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$, welches ebenfalls den Charakter der Unbestimmtheit an sich trägt, durch ein völlig bestimmtes Integral darzustellen suchen.

§. 1.

Summation periodischer Reihen durch das arithmetische Mittel.

2.

Es sei

$$1.\quad y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_p x^{p-1} + a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + \dots$$
$$\dots + a_p x^{2p-1} + a_1 x^{2p} + a_2 x^{2p+1} + \dots$$

wo $a_1, a_2, a_3, \dots a_p$ bestimmte, reelle Werthe haben.

Diese Reihe, welche aus einer unendlich oftmaligen Wiederholung einer $p$gliedrigen Periode zusammengesetzt ist, wollen wir für jene Werthe von x, für die sie convergirt, summiren. Bezeichnet man zu diesem Zwecke durch P die Summe der p ersten Glieder derselben, so ist auch

$$2.\quad y = Q(1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + \dots).$$

Allein es ist, von $x = 0$ bis $x = 1$ inclusive,

$$3.\quad \frac{1}{1-x^p} = 1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + \dots,$$

daher wird, vermöge der zweiten dieser Gleichungen, die Gröfse y für alle Werthe von x, die kleiner als die Einheit sind, endliche Werthe annehmen. Diese Werthe werden gröfser und gröfser, je mehr der Werth von x der Einheit näher kommt. Wird endlich $x = 1$, so wird y unendlich grofs.

Es läfst sich jedoch diesem Unendlich-grofs-werden von y, für $x = 1$, durch eine schickliche Annahme der Coëfficienten $a_1, a_2, a_3, \dots$ vorbeugen. In der That zeigen die Gleichungen (2.) und (3.), dafs dieses Unendlich-grofs-werden von y für $x = 1$ von dem in $1 - x^p$ enthaltenen Factor $1 - x$ herrührt. Wählt man daher die Coëfficienten $a, a_2, a_3, \dots a_p$ dergestalt, dafs auch P diesen Factor enthalte, so ist, wegen

$$y = \frac{P}{1-x^p},$$

nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $1 - x$ im Zähler und Nenner dieses Bruches, für $x = 1$ die Gröfse y nicht mehr unendlich grofs. Der sich für $x = 1$ ergebende Werth stellt dann die Grenze vor, der sich y ohne Ende nähert, wenn x unendlich nahe der Einheit kommt. Setzt man also

$$P = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \dots + a_p x^{p-1}$$

und

$$4.\quad 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_p,$$

so ist P durch $1 - x$ theilbar, und es besteht, für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$, die Gleichung

$$\frac{P}{1-x^p} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots + a_p x^{p-1} + a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + \ldots$$
$$\ldots + a_p x^{2p-1} + a_1 x^{2p} + \ldots$$

Kommt nun x der Einheit unendlich nahe, so nähert sich diese Reihe dem Werthe des Bruches, wenn in demselben $x = 1$ angenommen wird. Allein da für diesen Werth von x beim Statthaben der Gleichung (4.) dieser Bruch unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so hat man, nach einem bekannten Satze aus der Differenzialrechnung,

$$y_1 = -\frac{1}{p}\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

wo y_1 den Grenzwerth der Reihe vorstellt, falls x ohne Ende der Einheit nahe kommt und $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, den Differenzial-Coëfficienten von P nach x bedeutet, wenn nach der Differenziation $x = 1$ angenommen wird.

Es ist daher nach vollzogener Differenziation und Substitution:

$$y_1 = -\frac{1}{p}[(p-1)a_p + (p-2)a_{p-1} + (p-3)a_{p-2}) + \ldots + 3a_4 + 2a_3 + a_2],$$

oder auch

$$y_1 = -\frac{1}{p}[(p-1)(a_p + a_{p-1} + a_{p-2} + \ldots + a_3 + a_2)$$
$$-(a_{p-1} + 2a_{p-2} + 3a_{p-3} + \ldots + (p-3)a_3 + (p-2)a_2)];$$

daher, mit Zuziehung der Bedingungsgleichung (4.),

$$5.\quad y_1 = \frac{1}{p}[(p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \ldots + 3a_{p-3} + 2a_{p-2} + a_{p-1}].$$

Nun setze man in der Reihe der Gleichung (1.) $x = 1$, so ergeben sich mit Voraussetzung der Gleichung (4.) folgende Werthe, die eine Periode bilden:

$$a_1,\quad a_1 + a_2,\quad a_1 + a_2 + a_3,\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4,\quad \ldots$$
$$\ldots\quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{p-1},\quad 0,$$

deren arithmetisches Mittel dem oben gefundenen Werthe von y gleichkommt.

Es ist somit erwiesen, daſs für eine Reihe, die wir so eben untersucht haben, das arithmetische Mittel der periodischen Werthe derselben die Grenze ist, welcher sich ihr Werth ohne Ende nähert, wenn die Variable x um ein unendlich Weniges von dem Werthe absteht, für welchen die Reihe die Periode von Werthen darbietet.

3.

Auch folgendes Verfahren, die Regel des arithmetischen Mittels nachzuweisen, ist der Beachtung werth.

Setzt man der Kürze wegen folgende Gleichungen:

$$P_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{p-3} x^{p-4} + a_{p-2} x^{p-3} + a_{p-1} x^{p-2} + a_p x^{p-1},$$
$$P_2 = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3 + \ldots + a_{p-2} x^{p-4} + a_{p-1} x^{p-3} + a_p x^{p-2} + a_1 x^{p-1},$$
$$P_3 = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 + \ldots + a_{p-1} x^{p-4} + a_p x^{p-3} + a_1 x^{p-2} + a_2 x^{p-1},$$
$$P_4 = a_4 + a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 + \ldots + a_p x^{p-4} + a_1 x^{p-3} + a_2 x^{p-2} + a_3 x^{p-1}.$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_k = a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + a_{k+3} x^3 + \ldots + a_p x^{p-k} + a_1 x^{p-k+1} + a_2 x^{p-k+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{k-1} x^{p-1},$$

wo k was immer für eine ganze Zahl von 1 bis p vorstellen kann: so ist jede der folgenden Gleichungen mit der Gleichung (1.) gleich bedeutend:

$$y = \frac{P_1}{1-x^p},$$
$$y = \frac{x P_2}{1-x^p} + a_1,$$
$$y = \frac{x^2 P_3}{1-x^p} + a_1 + a_2 x,$$
$$y = \frac{x^3 P_4}{1-x^p} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y = \frac{x^{p-1} P_p}{1-x^p} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{p-1} x^{p-2}.$$

Wird nun die Gleichung (4.) vorausgesetzt, so erscheint der Factor $1-x$ in jeder der durch P_1, P_2, P_3, ... vorgestellten Functionen von x, und die sämmtlichen eben aufgestellten Gleichungen geben denselben Werth für y, wenn x einen innerhalb 0 und 1 liegenden Werth annimmt. Wird $x = 1$ vorausgesetzt, so erscheinen sämmtliche Brüche dieser Gleichungen unter der Form $\frac{0}{0}$, da sowohl die Zähler als die Nenner derselben den Factor $1-x$ enthalten. Addirt man hingegen diese Gleichungen, welches giebt.

$$py = \frac{P_1 + P_2 x + P_3 x^2 + P_4 x^3 + \ldots + P_p x^{p-1}}{1-x^p} + (p-1)a_1 + (p-2)a_2 x$$
$$+ (p-3)a_3 x^2 + \ldots + 2a_{p-2} x^{p-3} + a_{p-1} x^{p-2},$$

so erscheint im Zähler dieses Bruches der Factor $1-x$ wenigstens in der zweiten Dimension; und da der Nenner diesen Factor nur in der ersten Dimension enthält, so erübriget im Zähler, nach vollzogener Vereinfachung des Bruches, wenigstens die erste Potenz von $1-x$. Es ist somit die Null der Grenzwerth dieses Bruches, wenn x ohne Ende der Einheit nahe kommt. Behält daher y_1 die obige Bedeutung, so ist:

$$py_1 = (p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \ldots + 2a_{p-2} + a_{p-1};$$

welche Gleichung ebenfalls die Regel des arithmetischen Mittels darstellt.

Dafs der Zähler des so eben betrachteten Bruches den Factor $1-x$ wenigstens in der zweiten Dimension enthält, beweisen wir dadurch, indem wir zeigen, dafs das Differenzial dieses Zählers nach x diesen Factor wenigstens noch in der ersten Dimension enthält.

In der That: bezeichnet man diesen Zähler durch z, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dP_1}{dx} + x\frac{dP_2}{dx} + x^2\frac{dP_3}{dx} + \ldots + x^{p-1}\frac{dP_p}{dx} + P_2 + 2xP_3 + 3x^2P_4 + \ldots$$
$$\ldots + (p-1)x^{p-2}P_p.$$

Soll nun der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen den Factor $1-x$ enthalten, so mufs er für $x=1$ verschwinden. Nun ist

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad \ldots \quad P_p = 0,$$

wenn $x=1$ angenommen wird. Es erübriget daher noch nachzuweisen, dafs für denselben Werth von x die Summe

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \ldots + \frac{dP_p}{dx}$$

ebenfalls verschwindet. Allein nach den oben für P_1, P_2, P_3 etc. aufgestellten Werthen hat man für $x=1$:

$$\frac{dP_1}{dx} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (p-3)a_{p-2} + (p-2)a_{p-1} + (p-1)a_p,$$
$$\frac{dP_2}{dx} = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \ldots + (p-3)a_{p-1} + (p-2)a_p + (p-1)a_1,$$
$$\frac{dP_3}{dx} = a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \ldots + (p-3)a_p + (p-2)a_1 + (p-1)a_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dP_{p-1}}{dx} = a_p + 2a_1 + 3a_2 + \ldots + (p-3)a_{p-4} + (p-2)a_{p-3} + (p-1)a_{p-2},$$
$$\frac{dP_p}{dx} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + (p-3)a_{p-3} + (p-2)a_{p-2} + (p-1)a_{p-1},$$

daher:

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \ldots + \frac{dP_p}{dx} = \frac{p(p-1)}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p),$$

also, vermöge der Gleichung (4.):

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \ldots + \frac{dP_p}{dx} = 0,$$

w. z. b. w.

§. II.

Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$ auf ein anderes, in welchem die oberste Grenze endlich ist.

4.

Bevor wir die Lösung des allgemeinen Falles geben, wollen wir zur leichtern Übersicht des Verfahrens einen speciellen Fall voranschicken.

Stellt man durch w eine unendlich klein werdende, durch p eine unendlich grofs werdende ganze Zahl vor, setzt dann $pw = 2\pi$, wo π das Verhältnifs des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser bedeutet, so convergirt die ohne Ende fortlaufende Reihe

$$\begin{aligned} & w\sin w + xw\sin 2w + x^2 w\sin 3w + \ldots + x^{p-1} w\sin pw \\ & + x^p w\sin w + x^{p+1} w\sin 2w + x^{p+2} w\sin 3w + \ldots + x^{2p-1} w\sin pw \\ & + x^{2p} w\sin w + x^{2p+1} w\sin 2w + x^{2p+2} w\sin 3w + \ldots + x^{3p-1} w\sin pw \\ & + x^{3p} w\sin w + \ldots \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

die wir der Kürze durch y verstellen wollen, für alle Werthe von x, welche kleiner als die Einheit sind. Nähert sich x ohne Ende der Einheit, so nähert sich in demselben Maafse der Werth dieser Reihe dem des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \sin x\,dx$. Allein für denselben Werth von x nähert sich y dem Werthe von y_1 aus der Gleichung (5.), wenn man nur die Gleichung (4.) voraussetzen darf.

Es ist somit, wegen

$$a_1 = w\sin w,\quad a_2 = w\sin 2w,\quad a_3 = w\sin 3w,\quad \ldots\quad a_p = w\sin pw,$$

$$\int_0^\infty \sin x\,dx =$$

$$\frac{1}{p}[(p-1)w\sin w + (p-2)w\sin 2w + (p-3)w\sin 3w + \ldots + 2w\sin(p-2)w + w\sin(p-1)w],$$

wenn man nach Gleichung (4.)

$$[\sin w + \sin 2w + \sin 3w + \sin 4w + \ldots + \sin pw]w = 0$$

hat. Nun ist der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung gleichbedeutend mit dem bestimmten Integrale $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$, dessen Werth gleich Null ist: daher besteht auch die unmittelbar vorangehende Gleichung, welche übrigens noch auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\int_0^\infty \sin x\,dx =$$

$$[\sin w + \sin 2w + \sin 3w + \ldots + \sin pw]w - w\sin pw$$

$$-\frac{1}{p}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw] + w\sin pw.$$

Wird von dieser Gleichung die vorangehende abgezogen, so hat man

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{p}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw].$$

Nun ist $pw = 2\pi$, also $\frac{1}{p} = \frac{w}{2\pi}$, daher

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw]w.$$

Wird endlich der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in ein bestimmtes Integral umgesetzt, so ist

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = 1.$$

Ganz auf dieselbe Weise wird man auf folgende Gleichung geführt:

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = 0.$$

5.

Stellen a und b beliebige ganze oder gebrochene Zahlen vor; behält man für w und p die Bedeutungen der vorhergehenden No. bei, und ist, wenn m was immer für eine ganze Zahl bedeutet, $\varphi(\sin maw, \cos mbw)$ irgend eine Function von $\sin maw$ und $\cos mbw$, deren Product mit w unendlich klein bleibt: dann convergirt die ohne Ende fortla-fende periodische Reihe:

$$\begin{aligned} & w\varphi(\sin aw, \cos bw) + xw\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + x^2 w\varphi(\sin 3aw, \cos 3bw) + \ldots + x^{p-1} w\varphi(\sin paw, \cos pbw) \\ & + x^p w\varphi(\sin aw, \cos bw) + x^{p+1} w\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + x^2 w\varphi(\sin 3aw, \cos 3bw) + \ldots + x^{2p-1} w\varphi(\sin paw, \cos pbw) \\ & + x^{2p} w\varphi(\sin aw, \cos bw) + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

für alle Werthe von x, die ächte Brüche sind. Setzen wir noch

$$paw = ka.2\pi \quad \text{und} \quad pbw = kb.2\pi,$$

wo k völlig willkürlich und an die einzige Bedingung gebunden ist, die Producte ka und kb in ganze positive Zahlen zu verwandeln: so stellt die obige Reihe, wenn x unendlich nahe der Einheit kommt, den Werth des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$ dar. Allein für denselben Werth von x geht diese Reihe nach Gleichung (5.) über in

$$\frac{w}{p}[(p-1)\varphi(\sin aw, \cos bw) + (p-2)\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + \ldots + \varphi(\sin(p-1)aw, \cos(p-1)bw)],$$

wenn nach Gleichung (4.) folgende Gleichung besteht:

$$0 = w[\varphi(\sin aw, \cos bw) + \varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + \ldots + \varphi(\sin paw, \cos pbw)].$$

Es ist daher, im Falle des Statthabens dieser letzten Gleichung, mit Berücksichtigung des Werthes von $\frac{1}{p}$:

$$\int_0^{\infty}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx =$$
$$-\frac{1}{2\pi k}[w\Phi(\sin aw, \cos bw)+2w\Phi(\sin 2aw, \cos 2bw)+\ldots+pw\Phi(\sin paw, \cos pbw)]w.$$

Setzt man diese Reihe in bestimmte Integrale um, so ist beim Stattfinden der Gleichung

$$\int_0^{pw}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = 0$$

auch folgende Gleichung richtig:

$$\int_0^{\infty}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^{pw}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,x\,dx.$$

Läßt man in den Integralen, die sich von 0 bis pw erstrecken, x in kx übergehen, so hat man, wegen $\frac{pw}{k}=2\pi$,

$$6.\quad \int_0^{\infty}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx,$$

wenn die Bedingungsgleichung

$$7.\quad \int_0^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,dx = 0$$

realisirt wird.

Diese zwei Gleichungen, die bereits die beabsichtigte Reduction darstellen, sind noch einer Umformung fähig, die wir sogleich beifügen wollen.

Es ist nemlich

$$\int_0^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx.$$

Setzt man in dem Integrale, das von π bis 2π sich erstreckt, $2\pi-x$ statt x, so hat man, da ak und bk ganze Zahlen sind,

$$\int_{\pi}^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx$$
$$=2\pi\int_0^{\pi}\Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,dx-\int_0^{\pi}\Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx.$$

Es ist somit

$$\int_0^{2\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi}\Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,dx$$
$$+\int_0^{\pi}[\Phi(\sin akx, \cos bkx)-\Phi(-\sin akx, \cos bkx)]\,x\,dx.$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit der Bedingungsgleichung (7.), so ist

$$6'.\quad \int_0^{\infty}\Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = k\int_0^{\pi}\Phi(\sin akx, \cos bkx)\,dx$$
$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^{\pi}[\Phi(\sin akx, \cos bkx)-\Phi(-\sin akx, \cos bkx)]\,x\,dx,$$

wenn man

$$7'. \quad \int_0^\pi [\varphi(\sin akx, \cos bkx) + \varphi(-\sin akx, \cos bkx)]\,dx = 0$$

voraussetzen darf. Diese Darstellungsweise des Integrals

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)$$

gewährt den Vortheil, die Integrale $\int_0^\infty \varphi(\cos bx)\,dx$, $\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx$ unter sehr einfachen Formen darzustellen.

In der That geben diese zwei Gleichungen:

$$8. \quad \int_0^\infty \varphi(\cos bx)\,dx = 0,$$

wenn man

$$9. \quad \int_0^\pi \varphi(\cos bkx)\,dx = 0$$

voraussetzen darf, wo k willkürlich und bk eine ganze Zahl sein muſs.

Um einen ganz besondern Fall vor Augen zu haben, sei das bestimmte Integral $\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\cos x)\,dx$ vorgelegt. Poisson findet, wenn $\alpha < 1$ ist,

$$\int_0^\pi \log(1+\alpha^2+2\alpha\cos x)\,dx = 0;$$

daher ist auch für denselben Werthzustand von α:

$$\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\cos x)\,dx = 0.$$

Ferner geben die Gleichungen (6'.) und (8'.)

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx$$

$$= k\varphi(\sin akx)\,dx - \frac{k}{2\pi}\int_0^\pi [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx)]\,x\,dx,$$

wenn man

$$\int_0^\pi [\varphi(\sin akx) + \varphi(-\sin akx)]\,dx = 0$$

hat. In diesen zwei Gleichungen zerfälle man die von 0 bis π zu nehmenden Integrale in andere, die von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{\pi}{2}$ bis π gehen. In diesen letzteren setze man $\pi - x$ statt x, so ist:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx]\,dx$$

$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx) + \varphi((-1)^{ka}\sin akx) - \varphi(-(-1)^{ka}\sin akx)]\,x\,dx,$$

wenn die Bedingungsgleichung

$$10. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) + \varphi(-\sin akx)]\,dx = 0$$

Statt hat. Da ferner k ganz willkürlich ist, so kann man ak ganz und ungerade annehmen, wodurch, mit Zuziehung der eben aufgestellten Bedingungsgleichung, die Gleichung

$$11. \quad \int_0^\infty \varphi(\sin ax)\, dx = k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin akx)\, dx$$

gefunden wird.

Als Anwendung dieser zwei Gleichungen hat man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x) + \log(1+\alpha^2-2\alpha\sin x)]\, dx = 0,$$

wenn α kleiner als 1 vorausgesetzt wird; daher ist für denselben Werth von α:

$$\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\, dx.$$

Ferner findet man, wenn $\alpha < 1$ vorausgesetzt wird,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\, dx = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^5 + \dots,$$

daher

$$\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\, dx = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^5 + \dots$$

Beim Ableiten der vorhergehenden Gleichung wird man auch auf folgende Gleichung geführt:

$$\log(1+\alpha^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^6 + \dots,$$

die ebenfalls für alle Werthe von α, welche kleiner als die Einheit sind, besteht. Vertauscht man demnach α mit $\frac{1}{\alpha}$, so ist für alle Werthe von α, die >1 sind:

$$\log(1+\alpha^2) - \log\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^6 + \dots,$$

welche Gleichung, wie die vorhergehende, noch für $\alpha = 1$ Statt hat.

24.

Gröfstes Quadrat im Dreiecke.

(Vom Herrn Rechnungsrath *Brune* zu Berlin.)

Lehrsatz. Unter den drei Quadraten, welche in ein gegebenes spitzwinkliges Dreieck dergestalt beschrieben werden können, dafs ihre Winkelpuncte in die Seiten des Dreiecks fallen, ist dasjenige das gröfste, welches zwei Winkelpuncte in der kleinsten Seite des Dreiecks hat.

Beweis. Es sei (Fig. 1.) in dem Dreiecke ABC die Seite BC gröfser, als die Seite AC. Nach aufsen hin sei auf jener das Quadrat $BCED$, auf dieser das Quadrat $ACKH$ beschrieben, und aus den äufsersten Winkeln dieser beiden Quadrate seien nach den ihnen gegenüber stehenden Winkeln des Dreiecks die Geraden DA, EA, KB, HB gezogen: so geben bekanntlich die Durchschnitte dieser Linien mit den Dreiecks-Seiten BC und AC die auf letztere fallenden zwei Winkelpuncte der in das Dreieck zu beschreibenden Quadrate $FGgf$ und $LMml$ an. Endlich habe man noch aus den Dreiecks-Winkeln A und B auf die gegenüber stehenden Seiten die bis zu den äufsersten Quadrat-Seiten verlängerten Perpendikel ANO und BPQ gezogen.

Da nun, in den beiden Dreiecken BCK und ACE,

$$BC = CE;\quad CK = CA;\quad \angle BCK = \angle ACE,$$

so ist auch, wegen der Congruenz dieser Dreiecke,

$$BK = AE.$$

Da ferner in den beiden Dreiecken ACN und BCP

$$\angle ACN = \angle BCP;\quad \angle ANC = R = \angle BPC,$$

so ist auch, wegen der Ähnlichkeit dieser Dreiecke,

$$AC:BC = CN:CP = EO:KQ.$$

Bei der Voraussetzung, dafs $BC > AC$, mufs also auch $KQ > EO$ sein.

In den beiden rechtwinkligen Dreiecken AOE und BQK ist mithin, wie so eben bewiesen worden,

$$AE = BK;\quad EO < KQ;$$

folglich ist $AO > BQ$, indem $(OE)^2 + (OA)^2 = (QK)^2 + (QB)^2$ ist.

Nun ist ferner

$$FG : \left\{ \begin{matrix} DE \\ BD \end{matrix} \right. = AN : AO;\qquad LM : \left\{ \begin{matrix} HK \\ AC \end{matrix} \right. = BP : BQ:$$

daher

$$FG.AO = BC.AN;$$
$$LM.BQ = AC.BP.$$

Da aber $BC.AN = AC.BP$ (gleich der doppelten Fläche des Dreieck), so ist auch

$$FG.AO = LM.BQ;$$

und da oben bewiesen worden, dafs $AO > BQ$, so folgt

$$FG < LM;$$

d. h. die Seite des auf der gröfsern Dreiecks-Seite BC stehenden Quadrats $FfgG$ ist kleiner, als die Seite des auf der kleinern Dreiecks-Seite AC stehenden Quadrats $LlmM$, w. z. b. w.

Zusatz. Im rechtwinkligen Dreiecke ist also auch unter den beiden Quadraten, wovon das eine auf der Hypotenuse, das andre auf beiden Katheten steht, das letztere am gröfsten. In ein stumpfwinkliges Dreieck aber kann bekanntlich nur ein Quadrat, und zwar auf der gröfsten, dem stumpfen Winkel gegenüberstehenden Seite beschrieben werden.

Anmerkung. Das gröfste Quadrat im spitzwinkligen, oder im rechtwinkligen Dreiecke ist gleichwohl nicht unbedingt, sondern nur dann auch das gröfste in demselben mögliche Rechtek, wenn die Grundlinie und die Höhe des Dreiecks, jene in der Seite des Quadrats angenommen, sich gleich sind. Denn es sei (Fig. 2.) $LMml$ das auf der kleinsten Dreiecks-Seite CA stehende Quadrat, und $VWwv$ ein auf derselben beschriebenes, durch die Halbirungspuncte der andern Seiten CB und BA bestimmtes Rechteck: so ist

$$Cv:vV = Cl:lL,$$
$$Bv:vw = Bl:lm:$$

also $$Cv.Bv:vV.vw = Cl.Bl:lL.lm.$$

Da nun, der Voraussetzung gemäfs, v und w die Halbirungspuncte der Seiten CB und BA sind, so ist (Euklid's Elem. II. 5.)

$$CV.Bv > Cl.Bl;$$

mithin auch $$vV.vw > lL.lm = > (LM)^2.$$

Das gröfste Rechteck auf der Seite AC wird also durch die Halbirungspuncte der beiden andern Seiten bestimmt. Dasselbe kann aber nur dann zugleich ein Quadrat sein, wenn die Grundlinie CA und die Höhe BP des Dreiecks sich gleich sind; wie leicht einzusehen ist. Übrigens ist es gleichgültig, welche Dreiecks-Seite zur Beschreibung des gröfsten Rechtecks gewählt wird, da jedes derselben so grofs ist, als die halbe Fläche des Dreiecks.

25.

Beweis des Lehrsatzes 12. im 9. Bande dieses Jounals, S. 102, und Bemerkungen zum 10. Aufsatze im 11. Bande.

(Von Herrn *Jordann*, Stud. math. zu Münster.)

Lehrsatz. Wenn zwei Hauptbogen ABC und abc (Fig. 3.) von drei anderen Hauptbogen, die von einem Puncte P ausgehen, nemlich PA, PB und PC, in den Puncten A, B, C und a, b, c geschnitten werden, so ist immer:

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB \quad \text{und}$$
$$\frac{\sin PB}{\tang Pb}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tang Pa}\sin BC + \frac{\sin PC}{\tang Pc}\sin AB.$$

Beweis. Die beiden Hauptbogen ABC und abc mögen sich im Puncte Q schneiden. Nun finden hier, nach einem in dem Grundrifs der analytischen Sphärik von Gudermann elementar bewiesenen Satze, folgende beiden Proportionen Statt:

$$\frac{\sin Aa}{\sin Pa}:\frac{\sin Cc}{\sin Pc} = \frac{\sin AQ}{\sin CQ} \quad \text{und} \quad \frac{\sin Bb}{\sin Pb}:\frac{\sin Cc}{\sin Pc} = \frac{\sin BQ}{\sin CQ}.$$

In Bezug auf den Hauptbogen $ABCQ$ gilt aber auch folgende sehr bekannte Relation:

$$\sin AC.\sin BQ = \sin AQ.\sin BC + \sin AB.\sin CQ;$$

oder, wenn man durch $\sin CQ$ dividirt:

$$\sin AC.\frac{\sin BQ}{\sin CQ} = \frac{\sin AQ}{\sin CQ}\sin BC + \sin AB,$$

Hierin setze man für $\frac{\sin BQ}{\sin CQ}$ und $\frac{\sin AQ}{\sin CQ}$ die Werthe aus den beiden ersten Proportionen an die Stelle, und man hat:

$$\sin AC.\frac{\sin Bb}{\sin Pb}:\frac{\sin Cc}{\sin Pc} = \sin BC.\frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\frac{\sin Cc}{\sin Pc} + \sin AB.$$

Nun braucht man nur noch mit $\frac{\sin Cc}{\sin Pc}$ zu multipliciren, und man hat so-

gleich die erste herzuleitende Relation:

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB.$$

Um auch die zweite Relation herzuleiten, setze man hierin $(PB-Pb)$ für Bb, $(PA-Pa)$ für Aa und $(PC-Pc)$ für Cc an die Stelle, und man hat, wenn man zugleich die Zähler entwickelt:

$$\frac{\sin PB.\cos Pb - \cos PB.\sin Pb}{\sin Pb}.\sin AC$$

$$= \frac{\sin PA.\cos Pa - \cos PA.\sin Pa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin PC.\cos Pc - \cos PC.\sin Pc}{\sin Pc}.\sin AB,$$

oder

$$\left(\frac{\sin PB}{\tan Pb} - \cos PB\right).\sin AC$$

$$= \left(\frac{\sin PA}{\tan Pa} - \cos PA\right).\sin BC + \left(\frac{\sin PC}{\tan Pc} - \cos PC\right).\sin AB.$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\cos PB.\sin AC = \cos PA.\sin BC + \cos PC.\sin AB,$$

Wenn man diese Gleichung zu der vorigen addirt, so erhält man sogleich auch die zweite Relation:

$$\frac{\sin PB}{\tan Pb}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tan Pa}.\sin BC + \frac{\sin PC}{\tan Pc}.\sin AB.$$

Lehrsatz. Wenn drei von einem Puncte P ausgehende Bogen von Hauptkreisen von einem vierten in A, B, C geschnitten und in ihnen drei andere Puncte a, b, c angenommen werden, so liegen diese ebenfalls in einem Hauptkreise, wenn ist:

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB, \quad \text{oder}$$

$$\frac{\sin PB}{\tan Pb}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tan Pa}.\sin BC + \frac{\sin Pc}{\tan Pc}.\sin AB.$$

Beweis. Angenommen, die Puncte a, b, c liegen unter dieser Voraussetzung nicht in einem Hauptkreise. Man verbinde a und c durch einen Hauptbogen, der den Bogen PB im Puncte b' schneiden mag: dann ist, vermöge des vorhergehenden Lehrsatzes:

$$\frac{\sin Bb'}{\sin Pb'}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PB}{\tan Pb'}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tan Pa}.\sin BC + \frac{\sin PC}{\tan Pc}.\sin AB.$$

Nach der Annahme ist aber:

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PB}{\tang Pb}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tang Pa}.\sin BC + \frac{\sin PC}{\tang Pc}.\sin AB.$$

Hiernach wäre also:

$$\frac{\sin Bb'}{\sin Pb'} = \frac{\sin Bb}{\sin Pb} \quad \text{und} \quad \frac{\sin PB}{\tang Pb'} = \frac{\sin PB}{\tang Pb}.$$

Dafs die zweite Gleichung etwas Ungereimtes enthält, sieht man sogleich, indem $\tang Pb = \tang Pb'$ sein müfste, oder $Pb = Pb'$, welches nicht sein kann. Nicht so augenfällig ist es bei der ersten Gleichung. Man setze aber, da der Punct b' entweder oberhalb oder unterhalb von b liegt, $Bb \pm bb'$ für Bb' und $Pb \mp bb'$ für Pb'. Dann hat man:

$$\frac{\sin Bb.\cos bb' \pm \cos Bb.\sin bb'}{\sin Pb.\cos bb' \pm \cos Pb.\sin bb'} = \frac{\sin Bb}{\sin Pb},$$

oder auch:

$$\frac{\sin Bb.\cos bb' \pm \cos Bb \ \sin bb'}{\sin Bb} = \frac{\sin Pb.\cos b' \mp \cos Pb.\sin bb'}{\sin Pb},$$

d. i. $\pm \cot Bb = \mp \cot Pb$; welches nur dann Statt finden kann, wenn die Hauptbogen Bb und Pb sich zu einem Halbkreise ergänzen, d. h. wenn B der Gegenpunct von P ist. Ist dieses aber der Fall, so kann der Hauptbogen ABC nicht von den drei von P ausgehenden Hauptbogen PA, PB, PC in drei Puncten A, B, C geschnitten werden; welches gleichwohl eine nothwendige Bedingung in dem aufgestellten Lehrsatze ist. Daher müssen, sobald die eine oder die andere von den oben bewiesenen Relationen Statt findet, die Puncte a, b, c in einem Hauptbogen liegen.

Die beiden hergeleiteten Relationen

$$\frac{\sin Bb}{\sin Pb}.\sin AC = \frac{\sin Aa}{\sin Pa}.\sin BC + \frac{\sin Cc}{\sin Pc}.\sin AB \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PB}{\tang Pb}.\sin AC = \frac{\sin PA}{\tang Pa}.\sin BC + \frac{\sin PC}{\tang Pc}.\sin AB$$

drücken eigentlich eins und dasselbe aus, welches nicht nur dadurch einleuchtet, dafs man die eine aus der andern herleiten kann, sondern auch dadurch, dafs in zwei besonderen Fällen beide Relationen in eine und dieselbe übergehen. Nimmt man nämlich an, dafs der Punct P der sphärische Mittelpunct des Hauptbogens ABC sei, so verwandeln sich beide

Relationen in folgende:

$$\text{tang}\, Bb . \sin AC = \text{tang}\, Aa . \sin BC + \text{tang}\, Cc . \sin AB.$$

Giebt man dem Puncte P aber eine solche Lage, dafs er der sphärische Mittelpunct des Hauptkreises abc ist, so gehen beide Relationen in die folgende über:

$$\sin Bb . \sin AC = \sin Aa . \sin BC + \sin Cc . AB.$$

Dieser besondere Fall ist für die analytische Sphärik von Wichtigkeit, indem diese Relation nichts anderes ist, als die Gleichung einer sphärisch geraden Linie, die durch zwei gegebene Puncte geht.

Herr Gerwien, Pr.-Lieutenant im Königl. Preufs. 22. Inf.-Reg., liefert in einer Abhandlung im 11. Bande dieses Journals, Seite 130, den Beweis eines anderen, von meinem Lehrer, dem Herrn Prof. Dr. Gudermann, aufgegebenen Lehrsatzes, und zwar des reciproken von dem Satze, den ich oben bewiesen habe, giebt aber den Beweis dieses Lehrsatzes nicht, sondern stellt statt dessen den letztgenannten besonderen Fall als Lehrsatz auf. Aufserdem giebt der Herr Verfasser in diesem Aufsatze noch ein Paar andere Lehrsätze, von denen hier beim Beweise des obigen Lehrsatzes Gebrauch gemacht worden ist. Dieselben sind aber nicht neu, sondern bekannt. Der vierte Lehrsatz ist nichts anderes, als die goniometrische Formel:

$$\sin(\alpha+\beta) . \sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha . \sin\gamma + \sin\beta . \sin(\alpha+\beta+\gamma).$$

Den Beweis dieser Formel, so wie auch des siebenten, von Herrn Gerwien aufgestellten Lehrsatzes, findet man in einem Lehrbuche der Sphärik, betitelt: „Die Sphärik oder Geometrie der Kugelfläche, in drei Theilen, von Karl Friedrich Schulz, Dr. der Philosophie und Conrector am Gymnasium zu Cottbus. Leipzig, bei Karl Cnobloch. 1828.

Es kann übrigens der Beweis des vom Herrn Gudermann aufgegebenen 13. Lehrsatzes nach meiner Meinung auch auf eine ähnliche Weise geführt werden, wie der Beweis des obigen Lehrsatzes; und zwar auf folgende Weise.

Lehrsatz. Wenn aus drei Puncten A, B, C eines Hauptkreises (Fig. 4.) drei Hauptbogen AP, BP und CP nach einem Puncte P gezogen werden, und man aus denselben drei Puncten A, B, C noch drei an-

dere Hauptbogen nach einem zweiten Puncte Q zieht, so ist immer:

$$\frac{\sin PCQ}{\sin QBX}.\sin APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX}.\sin BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX}.\sin APB \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX}.\sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX}.\sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX}\ \sin APB.$$

Beweis. Man verbinde die Puncte P und Q durch einen Hauptbogen. In dem oben angeführten Grundrifs der analytischen Sphärik wird bewiesen, dafs, wenn man die Winkel eines sphärischen Dreiecks durch drei Scheitellinien theilt, die sich in einem Puncte schneiden, dafs dann das Product der Verhältnisse zwischen den Sinussen der einzelnen Theile der Winkel immer $= 1$ ist. Wenn man diesen Satz auf unsere Figur anwendet, so hat man hier folgende zwei Proportionen:

$$\frac{\sin PAQ}{\sin QAX}\cdot\frac{\sin ACQ}{\sin PCQ}\cdot\frac{\sin CPQ}{\sin APQ} = 1 \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX}\cdot\frac{\sin BCQ}{\sin PCQ}\cdot\frac{\sin CPQ}{\sin BPQ} = 1.$$

Diese beiden Proportionen sind aber gleichbedeutend mit den beiden folgenden:

$$\frac{\sin PAQ}{\sin QAX}:\frac{\sin PCQ}{\sin ACQ} = \frac{\sin APQ}{\sin CPQ} \quad \text{und}$$

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX}:\frac{\sin PCQ}{\sin ACQ} = \frac{\sin BPQ}{\sin CPQ}.$$

Nun ist auch:

$$\sin APC.\sin BPQ = \sin APB.\sin CPQ + \sin BPC.\sin APQ,$$

oder, wenn man durch $\sin CPQ$ dividirt,

$$\sin APC.\frac{\sin BPQ}{\sin CPQ} = \sin APB + \sin BPC.\frac{\sin APQ}{\sin CPQ}.$$

Hierin setze man für $\frac{\sin BPQ}{\sin CPQ}$ und $\frac{\sin APQ}{\sin CPQ}$ die Werthe aus den beiden obigen Proportionen an die Stelle, und man hat:

$$\sin APC.\frac{\sin PBQ}{\sin QBX}:\frac{\sin PCQ}{\sin ACQ} = \sin APB + \sin BPC.\frac{\sin PAQ}{\sin QAX}:\frac{\sin PCQ}{\sin ACQ}.$$

Wenn man nun mit $\frac{\sin PCQ}{\sin ACQ}$ multiplicirt, und zugleich $\sin QCX$ für $\sin ACQ$ an die Stelle setzt, so erhält man sogleich die erste zu beweisende Relation:

$$\frac{\sin PBQ}{\sin QBX}.APC = \frac{\sin PAQ}{\sin QAX}.BPC + \frac{\sin PCQ}{\sin QCX}.\sin APB.$$

Um auch die zweite Relation hieraus herzuleiten, setze man $(PBX - QBX)$ für PBQ, $(PAX - QAX)$ für PAQ und endlich $(PCX - QCX)$ für PCQ an die Stelle, so erhält man durch Entwickelung des Ausdrucks:

$$\left(\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX} - \cos PBX\right).\sin APC$$

$$= \left(\frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX} - \cos PAX\right).\sin BPC + \left(\frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX} - \cos PCX\right).\sin APB.$$

Es ist aber bekanntlich:

$$\cos PBX.\sin APC = \cos PAX.\sin BPC + \cos PCX.\sin APB.$$

Wenn man diese Gleichung zu der vorigen addirt, so hat man:

$$\frac{\sin PBX}{\operatorname{tang} QBX}.\sin APC = \frac{\sin PAX}{\operatorname{tang} QAX}.\sin BPC + \frac{\sin PCX}{\operatorname{tang} QCX}.\sin APB.$$

26.

Aufgaben und Lehrsätze,

erstere aufzulösen, letztere zu beweisen.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.)

---

1. Sind beliebige n Ebenen A, B, C, D, ... gegeben (z. B. die Ebenen, in welchen die Seitenflächen irgend eines Polyëders liegen), und legt man durch irgend einen festen Punct K eine willkührliche Ebene P, nennt die Winkel, welche diese mit ihnen bildet, beziehlich α, β, γ, δ, ..., und multiplicirt die Cosinus dieser Winkel beziehlich mit beliebigen gegebenen Gröfsen a, b, c, d, ...: so wird die Summe dieser Producte irgend einen bestimmten Werth S haben, so dafs

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta + \ldots\ldots = S$$

ist. Soll nun die Ebene P um den festen Punct K sich so bewegen, dafs (wenn auch die Winkel α, β, γ, ... sich ändern) die Summe S constant bleibt, so berührt sie stets irgend einen geraden Kegel K (zweiten Grades), dessen Axe Q fest ist, d. h., die unzähligen Kegel K, welche auf diese Weise entstehen, wenn man die beschreibende Ebene in immer anderer ursprünglichen Lage annimmt, wo zugleich der Werth S sich ändert, haben eine gemeinschaftliche Axe Q. Die Grenzen der Kegelschaar sind einerseits die Axe Q, wo der Erzeugungswinkel des Kegels $= 0$ ist, und andererseits diejenige Ebene R, welche im Puncte K auf der Axe Q senkrecht steht, und wo der Erzeugungswinkel $= \frac{1}{2}\pi$ ist. In diesen Grenzen erreicht der Werth S sein Minimum und Maximum. (Die Ebene R ist demnach einzig in ihrer Art, indem ihr allein ein bestimmter Werth S_1 entspricht; andererseits entspricht allen Ebenen, welche durch die Axe Q gehen, gemeinschaftlich ein eigenthümlicher Werth S_2, und diese zwei Werthe sind also unter allen der kleinste und gröfste, oder die Grenzen von S.)

Nimmt man statt K irgend einen andern festen Punct K_1 an, so sind natürlicherweise die neuen Grenzen Q und R den vorigen parallel, d. i. $Q_1 \# Q$ und $R_1 \# R$.

2. Wenn in der Ebene irgend ein Netz von geradlinigen convexen Vielecken gegeben ist, dessen Grenze selbst ein convexes Vieleck ist, so soll gezeigt werden, ob allemal ein analoges Netz möglich sei, welches in

der Zahl, Gattung und Zusammenfügung der Vielecke mit jenem übereinstimmt, aber die Eigenschaft hat, dafs sich um jedes Vieleck insbesondere ein Kreis beschreiben läfst.

3. Es seien AB (Fig. 5.) die grofse Axe, C, D die Brennpuncte und M der Mittelpunct einer Ellipse. Wird die Axe durch irgend einen Punct X, der zwischen den Brennpuncten liegt, in zwei Abschnitte AX, BX getheilt, und beschreibt man mit denselben, beziehlich um die Brennpuncte C, D, Kreise, so schneiden sich diese bekanntlich in zwei Puncten a, b der Ellipse; und beschreibt man umgekehrt mit AX, BX, beziehlich aus D, C, Kreise, so schneiden sich auch diese in zwei Puncten α, β, die in der Ellipse liegen, und es sind sowohl a und α, als b und β Endpuncte eines Durchmessers derselben; und zwar sind die Durchmesser $a\alpha$, $b\beta$ einander gleich und bilden mit der Axe AB gleiche Winkel. Gleicherweise entsprechen jedem anderen Puncte Y der Axe, der zwischen C und D liegt, in der Ellipse vier bestimmte Puncte a_1, b_1, α_1, β_1, oder zwei einander gleiche, und gegen die Axe AB gleich geneigte Durchmesser $a_1\alpha_1$, $b_1\beta_1$. Verlangt man nun zu wissen, welche Lage zwei Puncte X, Y in der Axe haben müssen, damit die ihnen entsprechenden Durchmesser einander gegenseitig zugeordnet sind, d. h. damit sowohl $a\alpha$ und $a_1\alpha_1$, als $b\beta$ und $b_1\beta_1$ conjugirte Durchmesser der Ellipse sind: so wird man finden, dafs sie nach einem bestimmten Gesetze von einander abhängig sind; welches durch folgende Construction übersichtlich und klar sich darstellt. Über dem halben Abstande der Brennpuncte von einander, z. B. über MD, beschreibe man einen Halbkreis MED, nehme in demselben einen beliebigen Punct E, ziehe die Sehnen ME, DE, und trage diese vom Mittelpuncte M aus, auf entgegengesetzten Seiten, auf der Axe ab, z. B. $ME = MX$, und $DE = MY$: so werden die Puncte X, Y allemal der verlangten Bedingung genügen. (Ist der Punct E die Mitte des Halbkreises, so fallen die zwei Paare conjugirte Durchmesser in eines zusammen, und diese sind alsdann die gleichen conjugirten Durchmesser. Ähnliches findet Statt, wenn der Punct E in einem Endpuncte M oder D des Halbkreises angenommen wird, in welchem Falle ihm die Axen der Ellipse entsprechen.)

Wie lautet der analoge Satz für die Hyperbel?

4. Man denke sich eine beliebige Hyperbel; C und D seien ihre Brennpuncte, A ein Scheitel ihrer Hauptaxe und M ihr Mittelpunct. Nimmt

man in der Hyperbel irgend einen Punct E an, z. B. in dem Zweige, welcher den Brennpunct C umschliefst, zieht die Leitstrahlen CE, DE, trägt auf jedem, von E aus, die halbe Axe MA ab, jedoch beim ersten CE, auf dessen Verlängerung über E hinaus: so liegen die Endpuncte F, G der abgetragenen Strecken ($EF = EG = MA$) allemal in demjenigen Durchmesser der Hyperbel, welcher dem Durchmesser ME zugeordnet ist. Oder: Bewegt sich ein gleichschenkliges Dreieck FEG, dessen Schenkel FE, GE der Gröfse nach constant sind, so, dafs seine drei Seiten FE, FG, GE, oder deren Verlängerungen, stets beziehlich durch drei feste Puncte C, M, D einer Geraden gehen, von denen der eine M, um welchen die Grundlinie FG sich dreht, in der Mitte zwischen den zwei andern C, D liegt: so beschreibt seine Spitze E eine Hyperbel, welche M zum Mittelpunct und C, D zu Brennpuncten hat, und deren halbe Hauptaxe (MA) den constanten Schenkeln des Dreiecks gleich ist, und von welcher endlich der Strahl ME und die Grundlinie MGF stets ein Paar conjugirte Durchmesser sind.

Wie lautet der analoge Satz für die Ellipse?

Auch bei den sphärischen Kegelschnitten findet ein analoger Satz Statt, der nur in Hinsicht der conjugirten Durchmesser (ME, MGF) von den Sätzen in der Ebene abweicht.

5. Zwei Seiten ac, bc eines beliebigen gegebenen Dreiecks acb beziehlich durch zwei Puncte x, y so zu theilen, dafs $ax : cy = ac : bc$ (wo dann immer auch $cx : by = ac : bc$ und also der untere Abschnitt der einen Seite sich zum oberen der andern verhält, wie jene Seite zu dieser), und dafs zugleich die Gerade xy, welche die Theilungspuncte verbindet, ein Minimum sei. (Diese Aufgabe ist geometrisch zu lösen.)

6. „Sind von zwei beliebigen geradlinigen ebenen Vielecken, einem NEck und einem N_1Eck, die Grundlinien a, a_1 nebst der Summe ihrer Umfänge, $U + U_1$ gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte, $F + F_1$, dann am gröfsten, wenn 1) jedes Vieleck einem Kreise eingeschrieben ist; wenn 2) die unbestimmten Seiten in jedem, für sich betrachtet, einander gleich sind, so dafs also diese Seiten in jedem Vieleck von einem Kreise berührt werden können; und wenn endlich 3) diese, zum Theil eingeschriebenen zwei Kreise einander

gleich sind." Und umgekehrt: „Sind die Grundlinien a, a, nebst der Summe der Inhalte $F+F_1$ gegeben, so ist die Summe der Umfänge $U+U_1$ ein Minimum, wenn die Vielecke den nämlichen drei genannten Bedingungen genügen."

Dieser allgemeine Satz findet natürlicherweise auch für den Fall Statt, wo die zwei Vielecke von gleicher Gattung sind, d. h., wo die Seitenzahl $N = N_1$ ist.

Wird insbesondere $N = N_1 = 3$ angenommen, so entspricht der Satz derjenigen Aufgabe (4.), welche ich im XIV. Bd. S. 89 dieses Journals vorlegte, von der aber bis jetzt, wie es scheint, noch keine befriedigende Lösung eingegangen ist.

Der vorstehende Satz hat, unter andern, auch die zwei nachstehenden Sätze zur Folge.

7. „Sind die geraden Grundlinien a, a_1, nebst der Summe der Umfänge $(U+U_1)$ zweier beliebigen Figuren A, A_1 (deren Begrenzung nämlich, außer jenen Grundlinien, ganz beliebig, grad-krumm- oder gemischtlinig sein darf) gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte $(F+F_1)$ dann am gröfsten, wenn beide Figuren Segmente gleicher Kreise sind." Und umgekehrt: „Sind die Grundlinien a, a_1 nebst der Summe der Flächeninhalte gegeben, so ist unter der nemlichen Bedingung die Summe der Umfange beider Figuren ein Minimum.

8. I. „Sind die Grundlinien a_1, a_2, a_3, ... und die Summe der Umfänge $U_1+U_2+U_3+$.... beliebig vieler ebener geradliniger Vieleke N_1, N_2, N_3, ... gegeben, so ist die Summe ihrer Flächeninhalte $F_1+F_2+F_3+$.... ein Maximum, wenn 1) jedes Vieleck einem Kreise eingeschrieben ist; wenn 2) die unbestimmten Seiten eines jeden unter sich gleich sind, und somit (vermöge I.) von einem Kreise berührt werden: und wenn 3) alle diese, zum Theil eingeschriebenen Kreise einander gleich sind." Und umgekehrt: „Wenn die Grundlinien der Vielecke nebst der Summe ihrer Inhalte gegeben sind, so ist, unter den nämlichen drei Bedingungen, die Summe ihrer Umfänge ein Minimum."

II. „Sind die geradlinigen Grundlinien a_1, a_2, a_3, ... und die Summe der Umfänge $U_1+U_2+U_3+$.... beliebiger Fi-

guren A_1, A_2, A_3, ... gegeben, so ist die Summe ihrer Inhalte ein Maximum, wenn sie sämmtlich Segmente gleicher Kreise sind." Sind die Grundlinien und die Summe der Flächeninhalte gegeben, so ist, unter derselben Bedingung, die Summe der Umfänge ein Minimum."

Anmerkung. Die Schwierigkeiten, welche die Sätze über Maximum und Minimum bei geometrischen Gegenständen häufig darbieten, und die nicht selten der Art sind, dafs sie den gewöhnlichen allgemeinen Regeln Trotz bieten, reitzten mich zu dem Versuche, solche Sätze rein geometrisch zu behandeln, um auf diesem Wege ihren eigentlichen Grund zu erforschen. Meine Bemühungen wurden bei vielen Sätzen mit dem besten Erfolge belohnt; und blieben sie auch in Rücksicht anderer Sätze vor der Hand noch fruchtlos, so bin ich doch der Meinung, dafs es in den meisten Fällen gelingen werde, ein günstiges Resultat zu erhalten; womit dann zugleich der Vortheil verbunden sein wird, dafs das wahre Wesen der Sätze mehr aufgeklärt, d. h. ihr Ursprung, oder die nothwendige Bedingung ihrer Existenz nachgewiesen wird, welches Alles bei der andern Methode weder gefordert, noch in derselben Einfachheit erlangt werden kann. Freilich wird die letztere Methode jeden aufgestellten Satz sofort auch leicht beweisen, sobald man nämlich sieht, worauf es eigentlich ankommt; welche Gröfsen in Rechnung zu bringen sind, u. s. w.: aber dieses ist unstreitig weniger wichtig, als jenes, nämlich den Satz aus seinen primitiven Gründen auf die einfachste Art herzuleiten, und dadurch seinen natürlichen Zusammenhang mit andern Sätzen, oder die Abhängigkeit der Sätze von einander, nachzuweisen. Zu dem giebt es viele Sätze, die ausschliefslich nur durch geometrische Betrachtungen, und als Folgen einer stufenweisen Entwickelung, sich mit gehöriger Eleganz beweisen lassen. So z. B. ergab es sich, dafs die vorstehenden Sätze (6., 7. und 8.) im Grunde nur auf dem einfachen Elementarsatze beruhen: „**Dafs unter den Sehnen eines Kreises, der Durchmesser die gröfste sei,**" wiewohl sie beim ersten Anblick viel schwieriger zu sein scheinen, und besonders, als Aufgaben gestellt, noch eher zu verwickelten Rechnungen Anlafs geben könnten, aus denen die einfache Bedingung, welche die Sätze enthalten, schwer zu erkennen sein dürfte. Jetzt mögen sie leichter zu beweisen sein.

Da meine Untersuchungen über die oben genannten Gegenstände sich zu sehr ausdehnten, und mich theilweise auf Hindernisse führten, deren Überwindung mir noch nicht gelungen ist: so habe ich mich entschlossen, vorerst nur einen Abschnitt, welcher insbesondere das „**Isoperimetrische**" (in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume) enthalten wird, auszuarbeiten und demnächst in einer kleinen Schrift bekannt zu machen Die genannten Sätze sind dem Inhalte dieser Schrift entnommen, wo sie auf die angedeutete Art bewiesen werden. Gleicherweise werden in der-

selben, durch eben so elementare, als der Natur des Gegenstandes angemessene, geometrische Betrachtungen mehrere andere interressante Sätze bewiesen werden, welche jeder andern Betrachtungsweise, wie es wenigstens nach den bisherigen Leistungen den Anschein hat, weniger leicht zugänglich sein möchten. Dahin rechne ich, — aufser den obigen Sätzen und denen, welche den Aufgaben im vorhergehenden Bande dieses Journals (B. XIV. S. 88 Aufg. 2. *a.c.e*; 3. *a.c.e*; 6., 7,) entsprechen — namentlich die Sätze über regelmäfsige sphärische Figuren, indem bis jetzt, so viel mir bekannt, noch auf keine Weise die Frage erledigt ist, ob bei diesen Figuren, wenn sie gleichen Umfang haben, diejenige, welche mehr Seiten hat, auch gröfseren Inhalt habe, wie solches bei den regelmäfsigen Figuren in der Ebene der Fall ist; ja nicht einmal für das sphärische Dreieck und Viereck ist diese Frage entschieden. In der genannten Schrift wird die Frage allgemein, und ich darf wohl sagen, auf die einfachste Art beantwortet, was ohne Zweifel auch jeder Unparteiische zugestehn wird. Übrigens sind die in Rede stehenden sphärischen Sätze, nebst den neuen Beweisen der analogen Sätze in der Ebene, der Gegenstand einer, am 7. Dec. v. J. in der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin gehaltenen Vorlesung.

Druckfehler im 14ten Bande.

Pag. 279 in secundo mille ante columnam loco 64 ponendum 67; apud numeros 633, 1478 loco 7, 4 legendum 6, 5.

In diesem Bande.

Seite 313 Zeile 9 v. u. und Seite 315 Zeile 5 v. o. lies gedreht statt gedacht
— 315 — 12 v. u. lies Kräfte-Paare statt Kräfte-Achsen.
— 316 — 8 v. u. lies Ebenen statt Ebene.

3. P a b c A B C Q

4. P Q A B C X

1. A L P f g B F m H G C M K H Q D O E

2. B v u l m C L V P W M A

5. Z A C X M Y D B

